TENGLAMA VA TENSIZLIKLARNI YECHISHDA O'ZGARUVCHINI QUTB ALMASHTIRISHLARDAN FOYDALANISH

Jabborov Muxammadi Musurmon o'g'li
Nizomiy nomidagi TDPU Umumiy matematika kafedrasi katta o'qituvchisi
muxammadijm@mail.ru

Muhammadiyev Samariddin Boymurod o'g'li
Nizomiy nomidagi TDPU magistranti

ANNOTATSIYA

Ayrim tenglama va tengsizliklarni elementar usullarda yechish ancha qiyinchilik tug'diradi, yoki bu usullarda yechish imkonsiz bo'ladi, bunday hollarda o'zgaruvchini almashtirish usuli yordamida masalani sodda ko'rinishga keltirish mumkin. Ushbu maqolada ayrim tenglama va tengsizliklarni o'zgaruvchisini qutb koordinatalariga o'tib yechish haqida so'z boradi.

Kalit so'zlar: Tenglama, tengsizlik, qutb koordinatalari, burchak, masofa.

АННОТАЦИЯ

Некоторые уравнения и неравенства элементарными методами решить труднее, либо решить их этими методами невозможно, в таких случаях задачу можно упростить, используя метод замены переменных. В данной статье рассматривается решение некоторых уравнений и неравенств путем преобразования переменной в полярные координаты.

Ключевые слова: уравнение, неравенство, полярные координаты, угол, расстояние.

ABSTRACT

Some equations and inequalities are more difficult to solve by elementary methods, or it is impossible to solve them by these methods, in such cases the problem can be simplified using the change of variables method. This article discusses the solution of some equations and inequalities by converting a variable into polar coordinates.

Keywords: equation, inequality, polar coordinates, angle, distance.

Matematikani o‘rganish davomida ko‘plab masalalarni yechish tenglama yoki tengsizliklarga keltirilib shu tenglamaning yechimi qidiriladi. Matematikada tenglama va tengsizlarni yechishni ko'plab usullari mavjud bo'lib bunday usullardan matematika fanini o'rganish davomida ko‘p marta foydalanamiz. Bazida shunday tenglama va tengsizliklar uchraydiki ularni yechish biroz qiyinlik tug‘diradi. Bunday tenglama va tengsizliklalarni yechish uchun biz matematikaning boshqa elementlaridan foydalanishimizga to‘g‘ri keladi.

Ushbu maqolada bir necha tenglama va tengsizliklarni yechishda qutb koordinalaridan foydalanish haqida so‘z boradi.

Tekislikda qutb koordinatalari quyidagicha kiritiladi: tekislikda O nuqta, OP nur va OP nurda yotuvchi $\overrightarrow{OE}=\vec{i}$ birlik vektorni belgilaymiz. hosil qilingan geometrik obraz qutb koordinatalari sistemasi deyiladi. Uni $\left(O,\vec{i}\right)$ ko‘rinishda belgilaymiz. O nuqta qutb boshi, OP nur qutb o‘qi deyiladi. M nuqtaning tekislikdagi vaziyati ma'lum tartibda olingan ikki son: biri OE birlik kesma yordamida o‘lchangan $\rho=\left|\overrightarrow{OM}\right|\geq 0$ masofa, ikkinchisi $\vec{i}$ nur $\overrightarrow{OM}$ nurning ustiga tushishi uchun surilishi kerak bo'lgan OP va OM vektorlar orasidagi φ burchak bilan to‘la aniqlanadi. (ρ,φ) qutb koordinalaridan (x,y) dekart koordinalariga o'tish $x=\rho\cdot\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi$ almashtirishlar orqali, aksincha, (x,y) dekart koordinalaridan (ρ,φ) qutb koordinalariga o‘tish $\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \varphi=arctg\frac{y}{x}$ almashtirishlar orqali bajariladi.

1-misol. $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ 4xy\left(2x^2-r^2\right)=r^4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Sistemadagi birinchi tenglama aylana tenglamasi bo'lib, uning qutb koordinatalari $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ ko'rinishida aniqlanadi. Haqiqatdan, ko'rish mumkinki bu almashtirishlar $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ ayniyatga ko'ra birinchi tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni $\left(r\cos\varphi\right)^2+\left(r\sin\varphi\right)^2=r^2 \Rightarrow \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. Endi $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ almashtirishlarni ikkinchi tenglamada qo'llaymiz:

$$4xy\left(2x^2-r^2\right)=r^4 \Rightarrow 4r\cos\varphi r\sin\varphi\left(2r^2\cos^2\varphi-r^2\right)=r^4 \Rightarrow 2r^4\sin2\varphi\left(2\cos^2\varphi-1\right)=r^4$$

Bundan $2\sin2\varphi\left(2\cos^2\varphi-1\right)=1$ ga ega bo'lamiz. $2\cos^2\varphi-1=\cos2\varphi$ va $2\sin2\varphi\cos2\varphi=\sin4\varphi$ ekanligidan, $2\sin2\varphi\cos2\varphi=1 \Rightarrow \sin4\varphi=1 \quad 4\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad n\in Z$

demak $\varphi=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\Rightarrow\varphi_1=\frac{\pi}{8};\varphi_2=\frac{5\pi}{8};\varphi_3=\frac{9\pi}{8};\varphi_4=\frac{13\pi}{8}$ ga ega bo'lamiz. $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ ekanligidan $\begin{cases} x_1=r\cos\frac{\pi}{8} \\ y_1=r\sin\frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ y_1=\frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$ har bir φ uchun bu tengliklarni bajarib quyidagi yechimlarga ega bo'lamiz; $\left(\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};\frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$,

$$\left(-\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};-\frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),\left(\frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};-\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

2-misol. $\frac{4x^2+4y^2+x^2y^2}{x^4+y^4+16}\geq1$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Yuqoridagi tengsizlikda $x=r\cdot\cos\varphi, y=r\cdot\sin\varphi$ almashtirishlarni amalga oshiramiz. U holda

$$\frac{4r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi-r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)-16}{r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)+16}\geq0.$$

$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ dan va $2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi$ dan va $(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^2=1$ $\Rightarrow \sin^4\varphi+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\cos^4\varphi=\sin^4\varphi+\cos^4\varphi+0{,}5\sin^2 2\varphi$ lardan

$\sin^4\varphi+\cos^4\varphi=1-0{,}5\sin^2 2\varphi$

Tengsizlikdagi kasrning maxraji r va φ ning har qanday qiymatlarida musbat qiymatlarni qabul qilganligi uchun $r^4(3\sin^2 2\varphi-4)+16r^2-64\geq 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Bu tengsizlikning chap tomoni r ga nisbat bikvadrat ifodani tashkil qiladi. Shundan kelib chiqib, diskriminantni manfiy bo'lmasin deb olamiz. $D=256+256\left(3\sin^2 2\varphi-4\right)=768\left(\sin^2 2\varphi-1\right)=-768\cos^2 2\varphi\geq 0$

Bu tengsizlik esa $\cos 2\varphi=0$ (ya'ni $\sin^2 2\varphi=1$) bo'lganda bajariladi. Bundan $2\varphi=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi\Rightarrow\varphi_1=\frac{\pi}{4};\varphi_2=\frac{3\pi}{4};\varphi_3=\frac{5\pi}{4};\varphi_4=\frac{7\pi}{4}$.

Demak, $\sin^2 2\varphi=1$ ni e'tiborga olsak, $-r^4+16r^2-16\geq 0$ yoki $(r^2-8)^2\leq 0$. Bundan $r=\pm 2\sqrt{2}$ kelib chiqadi. $x=r\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\varphi$ munosabatlardan $\left(x,y\right)$ sonlar sifatida $(2\sqrt{2};2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$ va $(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$ larni olish mumkin.

Bu kabi misollardan foydalanish nafaqat o'quvchilarning matematik tayyorgarligi oshishiga, balki fan ichidagi ichki aloqadorliklarni o'rnata bilish ko'nikmalarining shakllanishiga xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI: (REFERENCES)

1. А.Х.Шахмейстер. Иррациональные уравнения и неравенства. С-Петербург. Москва 2011.

2. А.С.Бортаковский, А.В.Пантелеев. Аналитическая геометрия в примерах и задачах. Москва 2005.

3. И.Ф.Шарыгина. Геометрические олимпиады, М.: МЦНМО, 2007. 152с.

4. Н.М.Седракян., А.М.Авоян. Неравенства. Метод доказательства. Москва. 2002.-256 с.

5. Е.Ю.Иванова. Тригонометрические уравнения и неравенства. МГУ Москва. 2008.