ОБ ОДНОЙ ВНУТРЕННЕКРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Кулдашева Шохсанам Равшанжон кизи

магистрант первого курса Ферганского государственного университета

АННОТАТСИЯ

В данной статье была исследована и изучена условная корректность одной задачи для бигармонического уравнения в круге.

Ключевые слова: бигармонического уравнения, условная корректность задачи, устойчивость решения, приближонное решения.

В данной работе исследована на условную корректность одна задача для бигармонического уравнения в круге.

Задача. Требуется найти функцию $U(\rho,\varphi)$, удовлетворяющую условиям:

$$\Delta^2 U(\rho,\varphi)=0 \text{ в } D=\{\,(\rho,\varphi): 0<\rho<R,\ 0\le\varphi\le 2\pi\ \} \tag{1}$$

$$\Delta\, U(R_1,\varphi)= f(\varphi),\ \ 0\le\varphi\le 2\pi\,, \tag{2}$$

$$U(R,\varphi)=0,\ 0\le\varphi\le 2\pi, \tag{3}$$

где $0<\mathrm{R}_1<\mathrm{R}$, $f(\varphi)$-заданная функция, $\Delta-$оператор Лапласа.

Покажем, что в поставленной задаче не имеет места непрерывная зависимость решения от данных. Действительно, функция

$$U_m(\rho,\varphi)=\varepsilon\frac{(\rho^2-R^2)}{2(m+1)}\left(\frac{\rho}{R_1}\right)Sin\, m\varphi \tag{4}$$

является решением задачи (1)-(3) при $f(x)=\varepsilon\, Sin nx$

Из (4) следует, что для любых констант $0<\varepsilon<1,\ c>0$ и переменных $\varphi\in(0,2\pi)$, $\rho\in(R_1,R\ )$ можно подобрать такие ε и m, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\varepsilon\, Sin m\varphi\|_{L_2(0,2\pi)}\le\varepsilon \quad ; \quad \|U_m(\rho,\varphi)\|_{L_2(0,2\pi)}>c.$$

Справедлива следующая теорема, характеризующая устойчивость решения задачи (1)-(3).

Теорема. Если функция $U(\rho,\varphi)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\|\Delta U(R,\varphi)\|_{L_2(0,2\pi)}\le M, \qquad (5)$$

$$\|\Delta U(R_1,\varphi)\|_{L_2(0,2\pi)}\le\varepsilon, \qquad (6)$$

то выполняется неравенство

$$\|U(\rho,\varphi)\|_{L_2(0,2\pi)}\le\frac{\left(R^2-\rho^2\right)\cdot M}{4[1+\lambda(\varepsilon)]}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\lambda(\varepsilon)}$$

где $\lambda(\varepsilon)$- корень уравнения

$$\left(\frac{R}{R_1}\right)^{\lambda}=\frac{M}{\varepsilon}$$

Эта теорема доказывается так же, как теорема 2 в [1] .

Пусть функция $f\ (\varphi)$ известна с точностью до б, т.е. известна функция $f_\delta(\varphi)$:

$$\|f_\delta(\varphi)-f(\varphi)\|_{L_2(0,2\pi)}\le\delta.$$

Предположим, что задача (1)-(3) поставлена условно-корректно [2], и множество корректности определяется неравенством (5). Возьмём в качестве приближенного решения задачи (1)-(3) функцию

$$U_{n\delta}(\rho,\varphi)=\frac{\left(\rho^2-R^2\right)}{4}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^m\frac{a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi}{m+1}\right];$$

здесь $a_{0,}\ a_{m,}\ b_m$ - коэффициенты Фурье функции $f_\delta(\varphi)$.

Оценим разность между точным и приближённым решением задачи (1)-(5) в метрике пространства $L_2(0,2\pi)$.

Аналогично [1], получим

$$\left\| U\ \ (\rho,\varphi) - U_{n\delta}(\rho,\varphi) \right\|_{L_2(0,2\pi)} \le$$

$$\le \frac{\left(R^2-\rho^2\right)}{4(n+1)}\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^n \delta + \frac{M}{4(n+2)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1}$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Атаходжаев М.А, Ахмедов З.А. Об одной условно-корректной задаче для бигармонического уравнения. Изв. АНРУз.Серия физ-мат. наук, 1980,№1

2. Лаврентьев М.М.Некорректные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск,1981.