BURISH SONI $\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots]$ BO‘LGANDA $R_\rho x = \{x + \rho\}$ AYLANA AKSLANTIRISHI UCHUN DINAMIK BO‘LINISH QURISH

Sulaymonov Fozil Uralovich
JDPU “Matematika o‘qitish metodikasi” kafedrasi katta o‘qituvchisi.
e-mail: fozil.sulaymanov@mail.ru

Abduxakimov Saidaxmat Xazratqulovich
JDPU “Matematika o‘qitish metodikasi” kafedrasi o‘qituvchisi.
e-mail. asaidahmat@mail.ru

Abduxakimova Maftuna G‘ofur qizi
JDPU “Matematika o‘qitish metodikasi” kafedrasi 2-kurs magistranti.
e-mail. asaidahmat@mail.ru

ANNOTATSIYA

Biz bu ishda bir o‘lchovli aylana akslantirishlarining markaziy tushunchalaridan biri aylananing dinamik bo‘linishni qurishni o‘rganamiz.

Kalit so‘zlar: uzluksiz kasr, burish soni, dinamik bo‘linish, munosib kasr.

АННОТАЦИЯ

В этой работе мы изучаем одно из центральных понятий одномерных отображений окружности, динамических разбиений окружности.

Ключевые слова: непрерывная дробь, число поворотов, динамическое разбиение, правильная дробью

ABSTRACT

In this work, we study one of the central concepts of one dimensional mappings of the circle, dynamic partitions of the circle.

Key words: continued fraction, number of turns, dynamic partition, proper fraction.

Kirish. Bir o‘lchovli aylana akslantirishlari dinamik sistemalar nazariyasining asosiy tushinchalaridan biri hisoblanadi.

Aylana gomemorfizmlari nazariyasi, dinamik sistemalar nazariyasining asosiy yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi.Aylana gomeomorfizmlar nazariyasining yaratilishi va keyingi taraqqiyoti buyuk matematiklar A. Puankare, A.Danjua, A.N.Kolmogorov, V.I.Arnold, Ya. Sinay[1] lar nomi bilan bog‘liqdir. $S^1=[0,1)$ birlik aylanada aniqlangan va $\rho=[1,1,...,1,1,...]$ burish soni bo‘lgan aylana gomeomorfizmlari uchun dinamik bo‘linishni. A.A.Djalilov[2] ishlarida o‘rganilgan.Aylana gomemorfizmlarida dinamik bo‘linish muhim ahamiyatga ega dinamik bo‘linishdan foydalanib ko‘plab masalalar o‘rganilgan va o‘rganib kelinmoqda. Burish soni $\rho=[k_1,k_2,...,k_1,k_2,...]$ bo‘lganda dinamik bo‘linishdan foydalanib S.X. Abdukhakimov, M.K. Khomidov[3] lar tomonidan kritik nuqtaga ega bo‘lgan aylana gomemorfizmlari uchun termodinmik formaliz qurilgan.

Burish soni $\rho=[k_1,k_2,...,k_1,k_2,...]$ bo‘lganda
$R_\rho x=\{x+\rho\}$ aylana akslantirishi uchun dinamik bo‘linish

Aylananing dinamik bo‘linishi, haqiqiy sonning uzluksiz kasrga yoyilmasi bilan muhim bog‘langan.

$\rho\in[0,1]$ sonni olamiz. Bu sonning uzluksiz kasrga yoyilmasi quyidagicha bo‘lsin: [4]

$$\rho=\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\ldots\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2}+\ldots}}}.$$

Uzluksiz kasrning elementlarini $k_1=k_n,\ k_2=k_{n+1}$ orqali belgilaymiz va ular quyidagi munosabatdan topiladi: $k_n=\{\frac{1}{k_n}\}, k_{n+1}=[\frac{1}{k_n}]$ bu yerda $\{\bullet\}, [\bullet]$ mos ravishda sonning kasr va butun qismlaridir. Biz ko‘ramizki, uzluksiz kasrlar $\rho\to\{\frac{1}{\rho}\}$ formula bilan aniqlangan, $[0,1)$ ni o‘zini-o‘ziga o‘tkazuvchi T akslantirish bilan bog‘liqdir.Xususiy holda $\rho=[k_1,k_2,\ldots,k_n,k_{n+1},\ldots]$ bo‘lsa $T\rho=[k_2,\ldots,k_n,k_{n+1}\ldots]$ bo‘ladi. $\rho=[k_1,k_2,\ldots,k_n,k_{n+1}\ldots]$ munosib kasr maxraji uchun $q_0=1,\ q_1=k_1,\ q_n=k_nq_{n-1}+q_{n-2}$ rekkurent munosabat o‘rinli.

---

[1] И. П. Корнфелед, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория М.: Наука, 1980.
[2] A.A. Джалилов, Термодинамический формализм и сингулярные инвариантные меры критических отображений, ТМФ, 2003, том 134, номер2,191-206.
[3] S.X. Abdukhakimov, M.K. Khomidov. The orbit of critical point and thermodynamic formalism for critical circle maps without periodic points. Uzbek Mathematical Journal, 2020 № 3pp. 4-15.
[4] R. Ostlund, D. Rand, J. Sethna, E. Sigga. Physica D.1983. V. 8. 303.

S^1 birlik aylanada R_ρ orqali ρ burchakka burishni belgilaymiz, ya'ni $R_\rho x = \{x+\rho\}$. Bu belgilashga ko'ra $x \in [0;1)$ deb olamiz.

$k_1\rho \le 1 < (k_1+1)\rho$ tengsizlik, S^1 aylanani uzunligi ρ ga teng (k_1+1) ta yoy bilan qoplash mumkinligini va k_1 ta yoy bilan qoplash mumkin emasligini bildiradi. S^1 aylanada $x_0 \in S^1$ nuqtani fiksirlaymiz va $\Delta_1^{(0)}$ orqali chegaralari x_0 va $x_0+\rho$ nuqtalar bo'lgan yoyni belgilaymiz. U holda $\Delta_i^{(0)} = R_\rho^{i-1}\Delta_1^{(0)}$, $1 \le i \le k_1$ lar uzunliklari ρ ga teng bo'lgan o'zaro bir-birlari bilan kesishmaydigan yoylarni ifodalaydi.

1-lemma . Agar burish soni $\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_1, k_2 \ldots]$ ga teng bo'lsa. $\Delta_1^{(n)}$ va $\Delta_1^{(n-1)}$ larning uzunliklari nisbati uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi.

$$\frac{|\Delta_1^{(n)}|}{|\Delta_1^{(n-1)}|} = \begin{cases} T\rho & agar \;\; n = 2k+1 \;\; bo'lsa, \\ T^2\rho & agar \;\; n = 2k \;\; bo'lsa. \end{cases}$$

bu yerda $[k_2, \ldots, k_n, k_{n+1} \ldots] = T\rho$ va $[k_1, \ldots, k_n, k_{n+1} \ldots] = T^2\rho$.

Isbot. 1-lemmani induksiya metodi orqali isbotlaymiz $n = 1$ bo'lsin u holda $\Delta_1^{(1)}$ orqali chegaralari $k_1\rho$ va x_0 nuqtalar bo'lgan yoyni belgilaymiz. $\Delta_1^{(1)}$ va $\Delta_1^{(0)}$ yoylarning nisbatlari quyidagilarga teng:

$$\frac{|\Delta_1^{(1)}|}{|\Delta_1^{(0)}|} = \frac{1-\rho k_1}{\rho} = \frac{1 - \frac{k_1}{k_1 + [k_2 + \ldots + k_n, k_{n+1} \ldots]}}{\frac{1}{k_1 + [k_2 + \ldots + k_n, k_{n+1} \ldots]}} = [k_2, \ldots, k_n, k_{n+1} \ldots] = T\rho.$$

Bundan ko'rinadiki, $|\Delta_1^{(1)}| < |\Delta_1^{(0)}|$. Shunday qilib, biz $\Delta_1^{(0)}$ yoyning chap chegarasidan uzunligi $|\Delta_1^{(1)}|$ bo'lgan yoylar bilan maksimal qoplash mumkin bo'lgan sonni ko'rishimiz mumkin. Ularning sonini m bilan belgilaymiz. U holda $m|\Delta_1^{(1)}| \le |\Delta_1^{(0)}| < (m+1)|\Delta_1^{(1)}|$ yoki $m \le \frac{1}{T\rho} = \frac{|\Delta_1^{(0)}|}{|\Delta_1^{(1)}|} < m+1$, bundan $m = [\frac{1}{T\rho}] = k_2$.

$\Delta_1^{(2)}$ orqali yoyning qolgan qismini belgilaymiz. U holda

$$\frac{|\Delta_1^{(2)}|}{|\Delta_1^{(1)}|} = \frac{|\Delta_1^{(2)}|}{|\Delta_1^{(0)}|} : \frac{|\Delta_1^{(1)}|}{|\Delta_1^{(0)}|} = \frac{1 - k_2 \frac{|\Delta_1^{(1)}|}{|\Delta_1^{(0)}|}}{T\rho} = [k_1, \ldots, k_n, k_{n+1} \ldots] = T^2\rho.$$

Bundan ko'rinadiki, $|\Delta_1^{(2)}| < |\Delta_1^{(1)}|$. Shunday qilib, biz $\Delta_1^{(1)}$ yoyning chap chegarasidan uzunligi $|\Delta_1^{(2)}|$ bo'lgan yoylar bilan maksimal qoplash mumkin bo'lgan sonni ko'rishimiz mumkin. Ularning sonini m bilan belgilaymiz. U holda $m|\Delta_1^{(2)}| \le |\Delta_1^{(1)}| < (m+1)|\Delta_1^{(2)}|$ yoki $m \le \frac{1}{T^2\rho} = \frac{|\Delta_1^{(1)}|}{|\Delta_1^{(2)}|} < m+1$, bundan $m = [\frac{1}{T^2\rho}] = k_1$.

Bundan bizga ma’lum bo‘ladiki, barcha k_n va k_{n+1} larni Evklid algoritmlari variantlari yordamida ko‘rish mumkin ekan.Demak $\Delta_1^{(n-1)}$, $\Delta_1^{(n)}$ yoylar quyidagi ko‘rinishda qurilar ekan.x_0 umumiy chegaralar bo‘lib,x_0 nuqtaning ikkala tomonida yotadi.

$$\frac{|\Delta_1^{(n)}|}{|\Delta_1^{(n-1)}|} = [k_n, k_{n+1}, \dots] = \begin{cases} T\rho & \text{agar } n = 2k+1 \ \ bo'lsa, \\ T^2\rho & \text{agar } n = 2k \ \ bo'lsa. \end{cases}$$

Endi m orqali $\Delta_1^{(n)}$ yoylarning $\Delta_1^{(n+1)}$ yoyni maksimal qoplash mumkin bo‘lgan sonini belgilasak, u holda $m|\Delta_1^{(n+1)}| \le |\Delta_1^{(n)}| < (m+1)|\Delta_1^{(n+1)}|$ yoki

$$m = [\frac{|\Delta_1^{(n+1)}|}{|\Delta_1^{(n)}|}] = \frac{1}{[T^n\rho]} = \begin{cases} k_2 & \text{agar } n = 2k+1 \ \ bo'lsa, \\ k_1 & \text{agar } n = 2k \ \ bo'lsa. \end{cases}$$

va

$$\frac{|\Delta_1^{(n+1)}|}{|\Delta_1^{(n)}|} = \frac{|\Delta_1^{(n-1)}| - k_n|\Delta_1^{(n)}|}{|\Delta_1^{(n)}|} = \frac{1}{T^n\rho} - [\frac{1}{T^n\rho}] = \{\frac{1}{T^n\rho}\} = T^{n+1}\rho.$$

1-lemma to‘liq isbot bo‘ldi.

Har bir $\Delta_1^{(n)}$ yoyning chegara nuqtalaridan biri x_0 nuqta bo‘ladi.Bu $n = 1,2$ bo‘lganda oson kelib chiqadi.Ixtiyoriy n uchun induksiyadan foydalanib ko‘rsatamiz. $\Delta_1^{(n-1)}$, $\Delta_1^{(n)}$ uchun bizning tasdig‘imiz isbotlangan bo‘lsin.Qurilishidan va induktiv holatga ko‘ra, chetki nuqtalaridan biri $R_\rho^{q_{n-1}}x_0$ bo‘lgan va uzunligi $|\Delta_1^{(n)}|$ bo‘lgan birinchi yoyni $R_\rho^{q_{n-1}}\Delta_1^{(n)}$ ko‘rinishda ifodalash mumkin.Oxirgi yoy

$$R_\rho^{q_{n-1}+q_n}\Delta_1^{(n)}, R_\rho^{q_{n-1}+2q_n}\Delta_1^{(n)}, \dots, R_\rho^{q_{n-1}+(k_{n+1}-1)q_n}\Delta_1^{(n)}$$

ko‘rinishga ega. $R_\rho^{q_{n-1}+(k_{n+1})q_n}\Delta_1^{(n)}$ yoy x_0 nuqtani qoplaydi.shuning uchun

$$R_\rho^{q_{n-1}+(k_{n+1})q_n}x_0 = R_\rho^{q_{n+1}}x_0$$

nuqta $\Delta_1^{(n)}$ ning chegarasida yotadi. $\Delta_i^{(n)} = R_\rho^{i-1}\Delta_1^{(n)}$ ni olamiz.

1-lemma to‘liq isbot bo‘ldi.

2-lemma . Ushbu

$$1)\ \Delta_i^{(n-1)}, \quad 1 \le i \le q_n, \quad \Delta_j^{(n)}, \quad 1 \le j \le q_{n-1}$$

ochiq yoylar sistemasi quyidagi xossalarga ega.

$$\Delta_{i_1}^{(n-1)} \cap \Delta_{i_2}^{(n-1)} = \emptyset, \quad i_1 \ne i_2; \ \Delta_{j_1}^{(n-1)} \cap \Delta_{j_2}^{(n-1)} = \emptyset, \quad j_1 \ne j_2.$$

Barcha i, j lar uchun $\Delta_i^{(n-1)} \cap \Delta_j^{(n-1)} = \emptyset$

$$2)\ \cup_{i=1}^{q_n} \Delta_i^{(n-1)} \cup \cup_{j=1}^{q_{n-1}} \Delta_j^{(n)} = S^1.$$

Isbot 1) $n=1{,}2$ bo‘lganda aniqlanishi va qurilishidan 2-lemmani tasdig‘i kelib chiqadi. Induksiya metodidan foydalanib $\Delta_i^{(n)}$, $1\leq i\leq q_{n+1}$, $\Delta_j^{(n+1)}$, $1\leq j\leq q_n$ larni qaraymiz.Shuningdek qurilishidan kelib chiqadiki, barcha $\Delta_i^{(n)}$, $1\leq i\leq q_{n+1}$ yoylar orasida $\Delta_1^{(n-1)}$ ichida va $\Delta_1^{(n+1)}$ yoy tashqarisida yotuvchi, kesishmaydigan faqat $\Delta_{1+q_{n-1}+jq_n}^{(n)}$ yoylar mavjud.Bundan kelib chiqadiki, barcha $\Delta_i^{(n)}$, $1\leq i\leq q_{n+1}$ yoylar $\Delta_1^{(n+1)}$ bilan kesishmaydi.Birinchi bo‘sh bo‘lmagan $\Delta_1^{(n)}\cap\Delta_i^{(n)}=\emptyset$ kesishma faqat $0=1+q_{n-1}+i_{n+1}q_n=1+q_{n+1}>q_{n+1}$ da hosil bo‘ladi.Shunday qilib, barcha $i_1\neq i_2;\ 1\leq i_1,\ i_2\leq q_{n+1}$ da $\Delta_{i_1}^{(n)}\cap\Delta_{i_2}^{(n)}=\emptyset$ bo‘ladi. Bu faktdan foydalanib $\Delta_1^{(n)}$ ning chegaralari x_0 va $R_\rho^{q_n}x_0$ dan farqli ekanligini ko‘ramiz. Shuning uchun osongina

$$\Delta_{1+q_n}^{(n+1)}\subset\Delta_1^{(n)}\quad va\quad \Delta_1^{(n+1)}\cap\Delta_1^{(n)}=\emptyset,\qquad 1<i\leq q_n$$

ga ega bo‘lamiz.

Shunday qilib, barcha $\Delta_i^{(n)}$, $1\leq i\leq q_{n+1}$ lar o‘zaro kesishmaydi va bularning har biri $\Delta_j^{(n)}$, $1\leq j\leq q_n$ lar bilan ham kesishmaydi .Agar biz $1\leq j_1,\ j_2\leq q_n,\ j_1\neq j_2$ lar uchun $\Delta_{j_1}^{(n+1)}\cap\Delta_{j_2}^{(n+1)}=\emptyset$ ekanligini ko‘rsatsak 2-lemmaning 1-tasdig‘ini to‘liq isbotlaymiz.Bu esa barcha $1\leq j\leq q_n$ da $\Delta_1^{(n+1)}\cap\Delta_j^{(n+1)}=\emptyset$ bilan ekvivalent.Ammo qurilishiga asosan $\Delta_1^{(n+1)}\cap\Delta_j^{(n+1)}$ faqat $i>q_{n+1}$ bo‘lgandagina bo‘sh bo‘lmagan kesishmaga ega. Demak 2-lemmaning 1-tasdig‘i isbot bo‘ldi.2-lemmanining 2-tasdig‘ini isbotlash uchun ham induksiyadan foydalanamiz.

Faraz qilaylik, $\cup_{i=1}^{q_n}\Delta_i^{(n-1)}\cup\cup_{j=1}^{q_{n-1}}\Delta_j^{(n)}=S^1$ induktiv ravishda kelib chiqqan bo‘lsin, ta’kitlab o‘tamiz $\Delta_1^{(n-1)}=\cup_{l=0}^{k_{n+1}-1}\Delta_{1+q_{n-1}+lq_n}^{(n)}\cup\Delta_j^{(n+1)}$. Shuning uchun barcha $1\leq j\leq q_n$ da $\Delta_j^{(n-1)}=\cup_{l=0}^{k_{n+1}-1}\Delta_{1+q_{n-1}+lq_n}^{(n-1)}\cup\Delta_j^{(n+1)}$ va $S^1=\cup_{i=1}^{q_n}\Delta_i^{(n-1)}\cup\cup_{j=1}^{q_{n-1}}\Delta_j^{(n)}=\cup_{j=1}^{q_n}\Delta_j^{(n+1)}\cup\cup_{j=1}^{q_n}\cup_{l=1}^{k_{n+1}-1}\Delta_{j+q_{n-1}+lq_n}^{(n)}\cup_{j=1}^{q_{n-1}}=\cup_{j=1}^{q_n}\Delta_j^{(n+1)}\cup_{i=1}^{q_{n-1}}\Delta_i^{(n)}$ va 2-tasdiq isbot bo‘ldi.

S^1 aylanada $\Delta_i^{(n-1)}$, $1\leq i\leq q_n$ va $\Delta_j^{(n)}$, $1\leq j\leq q_{n-1}$ yoylardan hosil bo‘lgan aylana bo‘linishini η_n bilan belgilaymiz.U holda $\eta_2\leq\eta_3\leq\ldots\leq\eta_n\leq\ldots$

Biz yuqorida kiritilgan aylana bo‘linishi $R_\rho x=\{x+\rho\}$. ρ burchakka burishga mos aylana bo‘linishidir.Bu holatda hosil bo‘lgan bo‘linish x_0 nuqtadan bog‘liq emas.

Ixtiyoriy $x_0\in S^1$ nuqta uchun chekli nuqtalari x_0 va $x_{q_n}=T_f^{q_n}x_0$ bo‘lgan yopiq intervalni $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ orqali belgilaymiz.

Takidlab oʻtamizki, n toq boʻlganda x_{q_n} nuqta x_0 nuqtadan chapda, n juft boʻlganda oʻngda yotadi. $\Delta_i^{(n)}(x_0)$ orqali $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ intervalning iteratsiyasini belgilaymiz.Bu nuqtaning $\{x_i,\ 0 \le i \le q_n + q_{n-1}\}$ trayektoriyasini aylanani kesishmaydigan $\Delta_k^{(n-1)}(x_0),\ 0 \le k \le q_n,\ \Delta_j^{(n)}(x_0),\ 0 \le j \le q_{n-1}$ boʻlaklarga boʻladi.

Hosil boʻlgan boʻlinishni $\xi_n(x_0)$ orqali belgilaymiz va bu $n-$ tartibli dinamik boʻlinish deyiladi. $\xi_n(x_0)$ boʻlinishdan $\xi_{n+1}(x_0)$ boʻlinishni quyidagicha hosil boʻladi.Barcha $\Delta_j^{(n)}(x_0),\ 0 \le j \le q_{n-1}$ boʻlaklar saqlanib, har bir $\Delta_i^{(n-1)}(x_0),\ 0 \le i \le q_n$ boʻlak $k_{n+1}+1$ ta boʻlakka boʻlinadi:

$$\Delta_i^{(n-1)} = \Delta_i^{(n+1)} \cup \cup_{s=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{1+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}.$$

Demak, dinamik boʻlinishda elementlar uzunligining 0 ga intilish tezligini baholaydigan va aylana gomoemorfizmning xarakteristikalarini oʻrganishda muhim oʻrin tutadigan quyidagi teoremani keltiramiz.

1-teorema $\forall\ x_0 \in S^1$ nuqtani qaraylik.Bu nuqta $\{x_i,\ 0 \le i \le q_n + q_{n-1}\}$ trayektoriyaning kesmasi aylanani kesishmaydigan boʻlaklarga ajratadi:

$$\Delta_i^{(n)}(x_0), \qquad 0 \le i \le q_{n-1} - 1,\ \ \Delta_j^{(n-1)}(x_0), \qquad 0 \le j \le q_n - 1$$

Hosil boʻlgan boʻlinishni $\xi_n(x_0)$ orqali belgilaymiz va $n-$ tartibli dinamik boʻlinish deymiz.Endi $\xi_n(x_0)$ dan $\xi_{n+1}(x_0)$ ga oʻtish jarayonini tasvirlaymiz. Bunda barcha $\Delta_i^{(n)}(x_0),\ 0 \le i \le q_{n-1} - 1$ boʻlaklar saqlanadi, va har bir $\Delta_j^{(n-1)}(x_0)$ boʻlak $(k_{n+1}+1)$ kesmaga ajratadi.

$$\Delta_j^{(n-1)} = \Delta_j^{(n+1)} \cup \cup_{s=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{j+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}.$$

Xulosa. Ushbu ish burish soni $\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_1, k_2 \ldots]$ boʻlganda ayna $R_\rho x = \{x + \rho\}$ gomeomorfizmi uchun dinamik boʻlinishni qurishga bagʻishlangan. Burish soni $\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_1, k_2 \ldots]$ boʻlganda aylana uzunliklari nisbati va aylana yoylari haqidagi lemmalar isbotlangan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YHATI

1. А.А. Джалилов, Термодинамический формализм и сингулярные инвариантные меры критических отображений, ТМФ, 2003, том 134, номер2,191-206.

2.S.X. Abdukhakimov, M.K. Khomidov. The orbit of critical point and thermodynamic formalism for critical circle maps without periodic points. Uzbek Mathematical Journal, 2020 № 3pp. 4-15.

3.И. П. Корнфелед, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория М.: Наука, 1980.

4.R. Ostlund, D. Rand, J. Sethna, E. Sigga. Physica D.1983. V. 8. 303.