KORREKT VA SHARTLI KORREKT MASALALAR

Haydarov Akram
Samarqand davlat universiteti dotsenti. SamDU. O‘zbekiston

Rustamov Shaxzod Abdullo o‘g‘li
Samarqand davlat universiteti magistranti. SamDU, O‘zbekiston
E-mail: rustamovshaxzod1997@gmail.com

ANNOTATSIYA

Mazkur maqolada matematik fizikaning korrekt va korrekt bo‘lmagan masalalaring qo‘yilishi hamda ayrim misollar orqali ularning korrekt yoki shartli korrekt ekanligi aniqlanadi hamda tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar: Korrekt masalalar. Korrekt bo‘lmagan masalalar. Gravitatsiya. Gravitatsiya masalasi. Maydon kuchlanganligi. Uzluksiz bog‘liqlik. Shartli korrekt masalalar. Korrektlik sinfi. Yechimning yagonaligi. Yechimning turg‘unligi.

KIRISH

Fizik jarayonlarning matematik modellarini yaratishda nokorrekt masalalar uchrashi ancha ilgari qayd qilingan. Ammo nokorrekt masalalar hech qanday fizik jarayonlar bilan bog‘liq emas deb kelingan. Bu xildagi masalalarni o‘rganish o‘tgan asrning 40-yillarida geofizik jarayonlarni talqin qilishda A.N. Tixonovning ilmiy ishlarida zaruriyat paydo bo‘ldi. Bunda u birinchi bo‘lib nokorrekt masalalarni quyilishida qo‘shimcha shartlar qo‘yilishi va bu shartlarni fizik jarayonlarning o‘zidan kelib chikishining ta’kidlab o‘tdi. Keyinchalik ko‘pchilik fizik jarayonlarga mos keluvchi masalalar nokorrekt masalalardan iborat ekanligi aniqlandi. Shulardan bir nechtasini misol qilib keltiramiz.

Issiqlik tarqalish jarayoni sodir bo‘layotgan sterjenda uning nuktalari temperaturasini o‘lchash masalasini yoki diffuziya jarayonini kuzataylik. Har ikkala jarayon issiqlik tarqalish tenglamasi orqali yozilishini ham bilamiz. Bu masalalarda Koshi sharti sifatida asboblar ko‘rsatkichi olinadi. Agar bizni issiqlik tarqalishining yoki diffuziya hodisasining kelajagi qiziqtirsa biz klassik ma’noda korrekt qo‘yilgan masalaga kelamiz. Agar bizni issiqlik tarqalishining yoki diffuziya hodisasining ta’rixi qiziqtirsa biz klassik ma’noda korrekt bo‘lmagan masalaga kelamiz.

Matematik fizikaning korrekt bo‘lmagan masalalaridan biri bo‘lgan analitik davom ettirish masalasi geofizikaning quyidagi masalasi bilan bog‘liq. Er yuzida gravitatsion maydon kuchlanganligining biror komponentasini o‘lchash jarayonini qaraylik. Agar er osti tuzilishidagi fundament birjinsli bo‘lmagan xususiyatga ega bo‘lsa, gravitatsion maydon potensiali grafigi nochiziqli bo‘ladi. Maydoning potensialiga asosan fundament tuzilishini aniqlash muhim masala bo‘lib, bu geofizikaning asosiy masalalaridan hisoblanadi.

Matematik fizika masalalrini yechishdagi asosiy usullardan biri integral tenglamalar usulidir. Matematik fizikaning nokorrekt quyilgan masalalari Fredgolmning birinchi tur integral tenglamasiga keltiriladi.

ASOSIY QISM

Matematik fizika masalasi Adamar (klassik) ma’nosida korrekt qo‘yilgan deyiladi, agar

1. masala yechimi mavjud,
2. masala yechimi yagona,
3. masala yechimi uning berilganlariga uzluksiz ravishda bog‘liq.

Matematik fizika masalasining yechimi va uning berilganlari biror funksional fazoning elementlari bo‘lganligi uchun yechimning mavjudligi, yagonaligi va turg‘unligi shu fazo elemetlari asosida olinadi. Shuning uchun, korrektlik shartlari quyidagicha kiritiladi:

1. Masala berilganlarining $C^{(k)}$, H, L_p yoki $W_p^{(\ell)}$ fazolarning yopiq to‘plam ostidagi hamma qiymatlari uchun masala yechimi mavjud. Ko‘pchilik hollarda fazoning to‘plam ostisi o‘rnida fazoning o‘zi bo‘lishi ham mumkin.

2. Masala berilganlarining biror sinfdagi har bir elementi uchun yechim biror sinfda yagona.

3. Berilganlarning $C^{(k)}$, H, L_p yoki $W_p^{(\ell)}$ dagi cheksiz kichik variatsiyasiga yechimning biror $C^{(k)}$ yoki $W_p^{(\ell_1)}$ dagi cheksiz kichik variatsiyasi mos kelsa.

Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi, issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo‘yilgan Koshi masalasining ta’rixi yoki analitik davom ettirish masalasi

$$\int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x) \qquad (1)$$

integral tenglamaga keltiriladi, bunda $K(x,s)$ va a hamda b integrallash chegaralari quyidagicha aniqlanadi.

1). $K(x,s)=\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k}sh(-ky)\sin kx\sin ks \quad a=0, \quad b=\pi$

2). $K(x,s)=\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}e^{-k^2t}\sin kx\sin ks \quad a=0, \quad b=\pi$

3). $K(x,s)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}, \quad a=-\infty, \quad b=\pi.$

Biz (1) tenglama o‘rniga umumiyroq bo‘lgan

$$Az=u \tag{2}$$

chiziqli operator tenglamani qaraymiz. Bunda z va u funksiyalar Z va U fazo elementlari bo‘lib, A - chizikli to‘la uzluksiz operator. Biz asosan X va F – Gilbert fazolari bo‘lgan holga to‘xtalamiz.

(1) tenglamani yechish masalasi A operator to‘la uzluksiz bo‘lganda turg‘unlik xususiyatiga ega bo‘lmaydi. Bunga sabab A^{-1} operatorning chegaralanmaganligidadir. Shu sababli, u funksiyani o‘lchashdagi kichik xatolar z funksiyani aniqlashda katta xatolarga olib keladi.

(1) operator tenglamani yechishning korrektligi F va U fazolarga bog‘liq. Berilgan masala F va ning ba’zi juftligi uchun korrekt bo‘lsa, boshqa juftligi uchun nokorrekt bo‘lishi mumkin. Lekin, (1) operator tenglamani yechish fizik masalalardan kelib chiqsa, f funksiya ixtiyoriy fazo elementlari bo‘laolmaydi. Ko‘pchilik hollarda F fazo C yoki L_2 bo‘lishi mumkin.

Matematik analizning differensiallash masalasi

$$\int_a^x \varphi(y)\,dy = f(x) \tag{3}$$

integral tenglamaga keladi. Differensiallash masalasi $C,\ C^1$ va $L_2,\ W_2^1$ fazolar jufti uchun korrekt qo‘yilgan bo‘lib, $C,\ C$ va $L_2,\ L_2$ fazolar jufti uchun korrekt qo‘yilmagan bo‘ladi. Lekin $f(x)$ ning qiymatlari C yoki L_2 fazo normasida berilganligi uchun bu masalani korrekt qo‘yib bo‘lmaydi.

Misol 1. $u_{xx}-u_{yy}=0$ tenglama yechimi

$$u(x,y)\Big|_{y=x}=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\Psi(x)$$

shartlar asosida topish masalasini korrekt qo‘yilmaganligini isbotlaymiz.

Tenglama xarakteristik sistemasi $dy - dx = 0,\quad dy + dx = 0$ bo‘lib, uning xarakteristik chiziklari $y - x = c_1,\quad y + x = c_2\ bo'ladi.$

$\xi = x + y,\ \eta = x - y$ almashtirishlar natijasida tenglamaning sodda ko‘rinishi $v_{\xi\eta} = 0$ bo‘ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$v(\xi,\eta) = f(\xi) + F(\eta)$ bo‘lib, $u(x,y) = f(x + y) + F(x - y)$ bo‘ladi.

Berilgan shartlardan foydalanib, $f\ \ va\ \ F$ funksiyalarni topamiz

$$f(2x) + F(0) = \varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial n} = \left(f_\eta' \cdot \xi_x + F_\eta'\eta_x + f_\xi'\xi_y + F_\eta' \cdot \eta_x\right)$$

Bulardan

$f(2x) + F(0) = \varphi(x),\qquad \sqrt{2}f'(2x) = \Psi(x)\quad \Longrightarrow$

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - F(0)$$

$f'(x) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}\Psi(x).$

Oxirgi tenglikni qanoatlantiruvchi funksiyalar cheksiz ko‘p. Shuning uchun qo‘yilgan tenglama yechimi yagona bo‘lmaydi. Bu yechimlar

$u(x,y) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) - F(0) + F(x - y),$

shu sababli masala korrekt qo‘yilmagan.

Misol 2. $y^2u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0\qquad (y < 0)$

$u(x,0) = \varphi(x),\quad u_y(x,0) = \Psi(x).$

Tenglama giperbolik turda. Tenglamaning xarakteristik sistemasi

$$\frac{dy}{dx} = \pm(-y)^{-1/2} \Rightarrow$$

$$(-y)^{-1/2}dy = \pm dx,\quad -\frac{2}{3}(-y)^{-1/2} = \pm x + C$$

$$C_1 = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2},\qquad C_2 = x - 2/3(-y)^{3/2}$$

xarakteristikalarni hosil qilamiz.

$$\xi = x + \frac{2}{3(-y)^{\frac{3}{2}}},\qquad \eta = x - 2/3(-y)^{3/2}$$

belgilashlarga asosan tenglamaning sodda ko‘rinishi $V_{\xi\eta} = 0$ bo‘ladi. Uning umumiy yechimi

$$V(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

dan iborat. ξ,η lardan $x_, y$ larga qaytamiz

$u(x,y) = f_1\left(x + \frac{2}{3}(-y)\right)^{3/2} + f_2\left(x - \frac{2}{3}(-y)\right)^{3/2}.$

$f_1\ \ va\ \ f_2$ larni aniqlashda

$$u(x,0) = \varphi(x),$$
$$\lim_{u\to 0}(-y)^{\frac{1}{2}}u(x,y) = \Psi(x)$$

shartlardan foydalanamiz:

$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$

$\lim_{u\to 0}(-y)^{1/2}\left\{-f_1'\left[x + 2/3(-y)^{3/2}\right] + f_2'\left[x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right]\right\} = \Psi(x).$

Agar $\Psi(x) \neq 0$ bo‘lsa, oxirgi tenglik o‘rinli bo‘lmaydi. Agar $\Psi(x) = 0$ bo‘lsa, u holda

$$u(x,y) = \varphi\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] - f_2(x + 2/3)(-y)^{3/2} + f_2\left[x - 2/3(-y)^{3/2}\right]$$

bo‘ladi, bunda $f_2(x)$ ixtiyoriy ikki marta differensiallanuvchi funksiya. Demak, bu holda masala yechimi yagona bo‘lmaydi. Shu sababli qo‘yilgan masala korrekt emas.

Misol 3. $u_{tt} = u_{xx}$ tenglamaning xarakteristik to‘rtburchakda berilgan Dirixle masalasini korrekt qo‘yilmaganligini isbotlaymiz.

Gursa masalasida xarakteristik to‘rtburchakning qo‘shni tomonida berilganlariga ko‘ra yagona ravishda xarakteristik to‘rtburchak ichida tenglama yechimini aniqlash mumkin. Shuning uchun tenglama yechimini xarakteristik to‘rtburchakda aniqlash uchun soha chegarasida Dirixle shartini qo‘yish shart emas. To‘lqin tenglamasi uchun Dirixle sharti yagona yechimni aniqlashda ortiqchalik qiladi. Ortiqcha shartlar asosida masala yechimga ega bo‘lmasligi mumkin. Bu aytilganlarga ko‘ra to‘lqin tenglamasi uchun Dirixle masalasi korrekt qo‘yilmagan bo‘ladi.

Misol 4. $u_{tt} = u_{xx} \quad 0 \leq x < \infty$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < \infty$$
$$u(0,t) = \Psi(t), \quad 0 \leq t < \infty \quad \varphi(0) = \Psi(0), \quad \varphi"(0) = \Psi"(0)$$

aralash masalani korrekt qo‘yilmaganligini isbotlang.

Bu masalaga mos bir jinsli masala nolmas yechimga ega:

$$u(x,t) = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{x+t}{2}\right) - \omega\left(\dfrac{x-t}{2}\right), & v - t \geq 0 \\ \omega\left(\dfrac{x+t}{2}\right) - \omega\left(\dfrac{t-x}{2}\right), & x - t \leq 0 \end{cases}$$

bunda $\omega(x,t)$ ixtiyoriy ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va $\omega'(0) = \omega''(0) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya. Bir jinsli bo‘lgan masala nolmas yechimga ega bo‘lganligi uchun uning yechimi cheksiz ko‘p bo‘ladi. Demak, masala korrekt qo‘yilmagan.

Matematik fizika masalasi shartli korrekt qo‘yilgan yoki A.N. Tixonov ma’nosida korrekt qo‘yilgan deb aytiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. Tajribadan ma’lumki, qo‘yilgan masalaning yechimi mavjud va u yechim biror funksional fazoning to‘plam ostisi M ga tegishli,

2. Masalaning yechimi M to‘plamda yagona,

3. M ga karashli yechim masalaning berilganlariga uzluksiz ravishda bog‘liq, ya’ni masala berilganlarining yechimni M dan tashqariga chiqarmaydigan cheksiz kichik variatsiyasiga yechimni M dagi cheksiz kichik variasiyasi mos kelsa.

Korrektlikning klassik ta’rifi va A.N. Tixonov ma’nosidagi ta’rifi orasidagi farqni qarash muhimdir. Korrektlikning klassik ta’rifida yechimning mavjudligi isbotlanadi. Keyingi ta’rifda yechimning mavjudligi tajribadan kelib chiqadi. Yechimning yagonaligi esa xar ikkala holda bir xildir, ya’ni yagonalik teoremasini isbotlash orqali beriladi. Yechimning turg‘unligi esa xar ikkala ta’rifda ham isbotlanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI: (REFERENCES)

1. Дурдиев Д.К. Обратные задачи для сред с последствием. Дис. док. физ-мат. Наука. 2019. 245 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск.: Сибирское научное издетелство, 2019. – 457 с.
3. Прилепко А.И. Об обратных задачах теории потенциала. //Дифференциальные уравнения. 2017. Т.3. С. 30-44.
4. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптическых уравнений. //Докл. АН СССР, 2014. Т. 277. №6. С. 1335 – 1337.
5. Хайдаров А., Шодиев Д.С. О единственности решения обратных задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Узб. мат. журнал. 2012. 76-78 стр.