BIR O‘LCHOVLI STEFAN MASALASI

Jo‘rayeva D.Sh
National University of Uzbekistan, Tashkent
E-mail: dildorajurayeva2021@gmail.com

Yarmetova D.I
National University of Uzbekistan , Tashkent
E-mail: saidovadilafruz1996@mail.ru

ABSTRACT

Now we will construct the simplest form of mathematical model describing phase transitions. The classic Stefan problem is a solidification and melting problem, such as the transition between ice and water. To obtain a solution to the classical Stefan problem, the heat equation must be solved. As mentioned above, it is needed to obtain a unique solution. It is called the variable “Stefan condition” and given below.

Keywords: soil, phase, freezing temperature, thermal conductivity.

1. INTRODUCTION

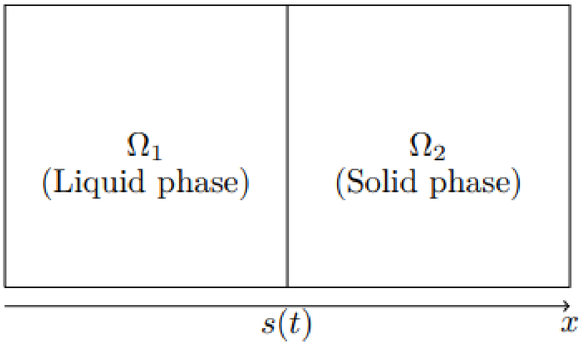
O‘zgaruvchan noma’lum interfeys x = s (t) sifatida belgilanadi, bu erda x - fazodagi pozitsiya;s(t) - erkin chegara va t – vaqt.[1]

Stefan shartini olish uchun biz ba’zi taxminlar qilishimiz kerak.O‘tishlar sodir bo‘lganda, kichik hajmdagi o‘zgarishlar bo‘ladi, garchi bu erda biz soddalik uchun bu xususiyatni e’tiborsiz qoldiramiz.Fizik sabablarga ko‘ra harorat fazalar orasidagi

x = s (t) interfeysida uzluksiz bo‘lishi kerak:

$$\lim_{x\to s(t)^+} u_S(x,t) = \lim_{x\to s(t)^-} u_L(x,t) = u_m \qquad \text{barcha t uchun} \qquad (1)$$

Ikki faza o‘rtasidagi o‘zgarishlar harorati doimiy qiymatga ega deb hisoblanadi, u_m.Boshlang‘ich vaqtda t = t_0 x = s(t_0) da ajratilgan ikki xil fazaga ega Ω ni ko‘rib chiqamiz, buni 1-rasmda ko‘rish mumkin. Biz tekislik simmetriyasini u haroratni faqat t va x ga bog‘liq deb qabul qilamiz.



Rasm 1

Ω x = s(t) 2 ta fazaga ajratilgan $\Omega_1 = \Omega \cap \{x < s(t)\}$ va $\Omega_2 = \Omega \cap \{x > s(t)\}$.

Interfeysning oʻngga, yaʼni qattiq erigan paytda holatini faraz qilaylik. Shunday qilib, biz suyuqlik fazasida u $\geq u_m$ va qattiq fazada u $\leq u_m$ boʻlishini kutishimiz kerak.

t = t_0 vaqtida interfeysning bir qismini koʻrib chiqing, S maydoni boʻlgan A disk shaklida soddaligi uchun. Keyinchalik $t_1 > t_0$ vaqtida interfeysning oʻrni s(t_1) > s(t_0) ga oʻzgardi.

Ayni paytda hajmi S × (s(t_1)) - s(t_0))) boʻlgan silindr erib ketgan va shuning uchun Q issiqlik miqdorini chiqaradi:

$$Q = S(s(t_1) - s(t_0)) * \rho l \qquad (2)$$

Bu yerda l - oʻziga xos yashirin issiqlik va ρ - zichlik.

Issiqlik oqimi

$$\phi_L = -K_L D u_L \qquad (3)$$

$$\phi_S = -K_S D u_S \qquad (4)$$

Bu erda K_i- i = L va qattiq i =S boʻlgan suyuqlik uchun materialning oʻtkazuvchanligi va biz u $\in C^1$ deb qabul qilamiz.

Energiyani tejash orqali (2) tenglamada soʻrilgan umumiy issiqlik (5) ga teng deb taxmin qilish tabiiydir,

$$Q = \int_{t_0}^{t_1}\int_A [\phi_L * \hat{x} + \varphi_S * (-\hat{x})] dA d\tau = \int_{t_0}^{t_1}\int_A [= K_L D u_L (s(\tau),\tau) * \hat{x} - K_S D u_S (s(\tau),\tau) * (-\hat{x})] dA d\tau,$$

(5)

bunda xˆ x− yoʻnalishidagi birlik vektoridir.

Fazoviy koordinatalar boʻyicha (5) ifodani integrallash

$$Q = A\int_{t_0}^{t_1} [-K_L \frac{\partial u_L}{\partial x}(s(\tau),\tau) + K_S \frac{\partial u_S}{\partial x}(s(\tau),\tau)] d\tau$$

(1.2.6)

buni (2) ifodaga teng deb hisoblaymiz.

(2) va (6) tenglamani tenglashtirib, (7) olamiz.

$$(s(t_1)-s(t_0))*\rho l=\int_{t_0}^{t_1}[-K_L\frac{\partial u_L}{\partial x}(s(\tau),\tau)+K_S\frac{\partial u_S}{\partial x}(s(\tau),\tau)]d\tau \quad (7)$$

, $t_1 \to t_0$chegarasini oling:

$$l\rho\lim_{t_1\to t_0}\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}=\lim_{t_1\to t_0}\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}[-K_L\frac{\partial u_L}{\partial x}(s(\tau),\tau)+K_S\frac{\partial u_S}{\partial x}(s(\tau),\tau)]d\tau \quad (8)$$

1 Teorema (Oraliq qiymat teoremasi).

f : [a, b] → R va f ∈ C bo‘lsin, u holda f f(a) va f(b) oxirgi nuqtalari orasidagi barcha qiymatlarga erishadi.

Isbot. Masalan tomonidan berilgan [2]

2 Teorema (Integrallar Uchun O‘rtacha Qiymat Teoremasi).

Agar f : [a, b] → R va f ∈ C [a, b] da bo‘lsa, u holda c ∈ [a, b] soni mavjuddir

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c). \quad (9)$$

Isbot.

1.2.2 teoremadan kelib chiqadiki, uzluksiz f(x) funksiya a ga ega [a, b] oraliqda minimal qiymat m va maksimal qiymat M. Integrallarning monotonligi va m ≤ f(x) ≤ M dan kelib chiqadiki,

$$mI=\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx=MI \quad (10)$$

bunda

$$I=\int_a^b dx=b-a \quad (11)$$

(11) tenglamadan foydalanilganda va (10) tenglamada I ga bo‘linganda (I > 0 bo‘lsa) (12) hosil bo‘ladi.

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M \quad (12)$$

Ekstremal qiymat teoremasidan bilamizki, m va M ga ham integral kamida bir marta erishiladi. Shuning uchun Oraliq qiymat teoremasi f funksiyasi [m, M] dagi barcha qiymatlarga ega ekanligini aytadi, aniqroq u c ∈ [a, b] mavjud.

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad (13)$$

2 teorema yordamida biz (8) tenglamani

$$l\rho s'(t_1)=\lim_{t_1\to t_0}\frac{1}{t_1-t_0}*(t_1-t_0)f(c) \quad (14)$$

shaklida yozishimiz mumkin, bunda biz yangi funktsiyani (soddalik uchun) (15) kiritdik. c ∈ [t0, t1].

$$f(c) = -K_L u_x(s(c), c) + K_S u_x(s(c), c) \quad (15)$$

. Lekin $t_0 \to t_1$ va f uzluksiz (u ∈ C) bo‘lgani uchun

$$l\rho s'(t_1) = f(t_1)$$

(16)

ga teng bo‘ladi.

Shu bilan birga, xuddi shu protsedura t_1 o‘rniga istalgan vaqtda bajarilishi mumkin bo‘lganligi sababli, biz (17) ni yozishimiz mumkin va shuning uchun f uchun ifoda bilan biz (18) ga erishamiz, bu Stefan sharti deb ataladi va erkin chegaradagi chegara shartidir. [3].

$$l\rho s'(t) = f(t) \quad (17)$$

$$l\rho \frac{ds}{dt} = K_L u_x(s(t), t) - K_S u_x(s(t), t) \quad (18)$$

Bir o‘lchovli bir fazali muammoni yarim cheksiz qattiq jism sifatida ko‘rsatish mumkin, masalan, qotib qolish harorati u = 0 bo‘lgan $0 \le x < \infty$ ni egallagan yupqa muz bloki. Qattiqlashuvdagi har qanday hajm o‘zgarishiga e’tibor bermaslik kerak bo‘lgan taxmin. Yupqa muz blokining belgilangan chegarasida x = 0 u yerda f(t) ko‘p turli xil “oqim funksiyalari” bo‘lishi mumkin.Masalan, biz qattiqlashuv haroratidan yuqori bo‘lgan doimiy haroratga ega bo‘lishimiz mumkin, ya’ni $u_0 > 0$, yoki vaqtga bog‘liq funksiya.Biz taxmin qilamizki, harorat qattiq faza doimiy bo‘ladi. Shunday qilib, muammo suyuqlik fazasida harorat taqsimotini va erkin chegara s(t) o‘rnini topishdir. Ikki faza mavjud bo‘lsa ham, muammo bir fazali muammo deb ataladi, chunki bu faqat suyuqlik fazasi noma’lum.

Suyuqlik hududi, $0 \le x < s(t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K_L}{C_L \rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha_L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ Issiqlik tenglamasi $0 < x < s(t)$, $t > 0$,

$u(0,t) = f(t)$, Chegaraviy shart,t>0,

$u(x,0) = 0$, Boshlangich shart

Erkin chegara $x = s(t)$

$$\rho l \frac{ds}{dt} = -K_L \frac{\partial u}{dx},$$ Stefan sharti

$s(0) = 0$, Eritma interfeysining dastlabki holati,

$u(s(t),t) = 0$, Interfeysdagi Dirixlet holati,

ya’ni muzlash harorati

2-faza - qattiq hudud, $s(t) < x < \infty$,

$u(x,t)=0$ $t, x \geq s(t)$ (19)

x = 0 chegara sharti har qanday bo‘lishi mumkin, ammo bunda biz [4] ga amal qilamiz va quyidagi holatlarni ko‘rib chiqamiz:

(i) $f(t)=1$

(ii) $f(t)=e^{t}-1$ (20)

Aslida ikkala muammomizni [4] ga muvofiq hal qilish mumkin edi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI: (REFERENCES)

1. Tobias Jonsson On the one dimensional Stefan problem with some numerical analysis Spring 2013-10-15
2. D. Andreucci. Lecture notes on the Stefan problem. 2002.
3. F. Morgan. Real Analysis and Applications. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.
4. S.L. Mitchell and M. Vynnycky. Finite-difference methods with increased accuracy and correct initialization for one-dimensional Stefan problems. Applied Mathematics and Computation 215 1609-1621, 2009.