BIRINCHI TARTIBLI KVAZICHIZIQLI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALA

Mirzayev Fayzulla Saydulla o‘g‘li
Termiz davlat universiteti o‘qituvchisi. TerDU. O‘zbekiston
E-mail: fayzullamirzayev95@gmail.com

Shokirova Gulmira G‘ofurjonovna
Termiz davlat universiteti Matematika(yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisiligi magistranti TerDU. O‘zbekiston
E-mail: shokirovag54@gmail.com

ANNOTATSIYA

Mazkur maqolada matematik fizikaning birinchi tartibli kvazichiziqli tenglamalar uchun chegaraviy masala qoyilishi hamda ayrim misollar orqali masalani yechish tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar: Chegaraviy masala. Kvazichiziqli tenglama. Boshlang‘ich shart. Chegraviy shart. Xarakteristika.

KIRISH

Fizika, mexanika, biologiya, ekologiya va boshqa sohalarning ko‘pgina masalalarining matematik modellari birinchi tartibli kvazichiziqli tenglamalar uchun turli ko‘rinishdagi masalalarni o‘ganishga keltiriladi. Ishlab chiqarish va fanning rivoji bugungi kunga kelib, nafaqat chiziqli masalalarni o‘rganishni balki, kvazichiziqli masalalarni ham o‘rganishni talab qilmoqda.

Birinchi tartibli kvazichiqli tenglamalar asosan 1950-yildan boshlab o‘rganila boshlangan bo‘lsa hozirgi kunga kelib matematik-fizikaning asosiy sohalaridan biri hisoblanadi. E. Hopf, S.N. Krujkov, L.D. Landau tomonidan birinchi tartibli kvazichiqli tenglamalar uchun asosiy masalalar qaralgan bo‘lib, O‘zbekistonlik olimlardan T. Jo‘rayev, M. Salohiddinov va ularning o‘quvchilari tomonidan ilmiy ishlar olib borilgan. Hozirgi kunga kelib bu soha keng rivojlanib boshqa tenglamalar qatori birinchi tartibli kvazichiziqli tenglamalarning turli ko‘rinishlari uchun ham boshlang‘ich va chegaraviy masalalar va ularni yechish usullari ishlab chiqilgan

ASOSIY QISM

Ko‘pincha ikki erkli o‘zgaruvchili birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida 1-erkli o‘zgaruvchi sifati masofa hamda 2-erkli o‘zgaruvchi sifatida vaqt qaraladigan $u(x,t)$ funksiya va uning xususiy hosilalari qatnashgan tenglamalar hamda tenglamalar sistemasi o‘rganiladi. Biz bu ishda $x \to t$ va $y \to x$ kabi almashtirish yordamida tenglama uchun qo‘yiladigan chegaraviy masalalar o‘rganamiz. Demak, bir o‘lchamli fazoda vaqtga bog‘liq o‘zgaruvchi noma’lum $u(x,t)$ funksiya va uning o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy hosilalari qatnashgan tenglamani o‘rganamiz .

$D \in R^2$ sohada

$$au_t(x,t) + bu_x(x,t) + cu = f(x,y) \qquad (1)$$

tenglama

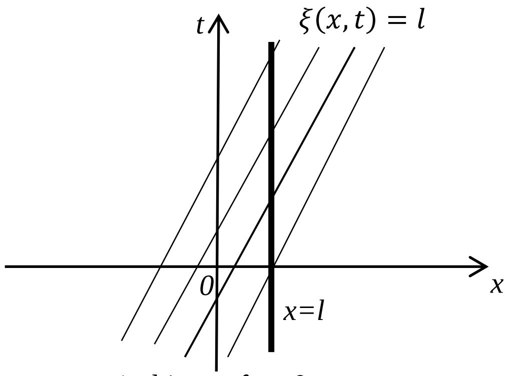
$$u(x,t_0\,) = \varphi(x)\,,\ -\infty < x < +\infty \qquad (2)$$

boshlang‘ich shartni hamda $x = l$ chegarada

$$u(l,t) = \psi(t)\,,\ x = l \qquad (3)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga chegaraviy masala deyiladi. Bu yerda $\psi,\varphi \in C^1$ sinfga tegishli funksiyalar.

Izoh: Agar tenglamada x va t erkli o‘zgaruvchilar masofa o‘zgaruvchilari bo‘lsa, u holda (1), (2) chegaraviy masala $C\colon \big(l,s,\psi(s)\big),\ s \in R$ parametrik ko‘rinishda berilgan chiziqni o‘z ichiga olgan tenglamaning integral sirtini topish masalasi bilan ekvivalentdir.



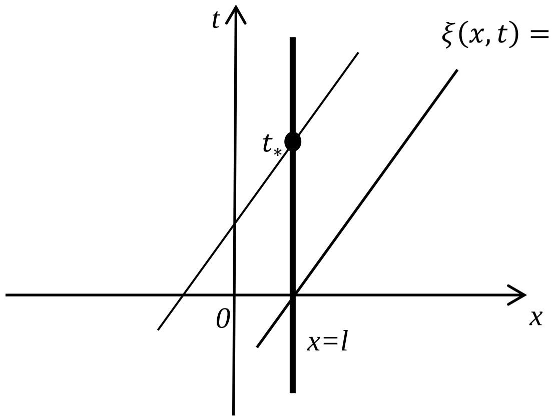
1-chizma. $\lambda > 0$.

(1)-(3) masalani yechishda xarakteristikalar metodidan foydalanamiz. Bunda xar bir (l,t_1) nuqtadagi $u(x,t_1)$ funksiyaning qiymatini (3) chegaraviy shartdan foydalanib topiladi va bu qiymatni shu nuqtadan o‘tuvchi tenglama xarakteristikasi butun soha bo‘ylab olib ketadi. Natijada butun $D \in R^2$ sohada masala yechimi topiladi.

Masalani yechishda xarakteristik almashtirishdan foydalanib,

$$u(x,y) \equiv v(\xi,\eta), \qquad f(x,y) = \tilde{f}(\xi,\eta)$$

yangi v funksiya uchun masala olamiz hamda tenglamaning integralini t_* dan t gacha xarakteristik chiziq bo'ylab integrallab masala yechimiga ega bo'lamiz. Bunda



2-chizma. $\lambda > 0$.

t_* nuqtani $\xi(x,t) = \xi(l,t_*)$ xarakteristik munosabat orqali topiladi (2-chizma). Demak, integralni quyidagicha aniqlab olamiz

$$\int_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\left(v(\xi,s)e^{\frac{c}{a}s}\right) ds = \int_{t_*}^{t} \frac{1}{a} e^{\frac{c}{a}\eta} \tilde{f}(\xi,\eta) ds \qquad (4)$$

u holda yechim quyidagi formula yordamida topiladi

$$u(x,y) = \psi(t_*)e^{\alpha t} + \frac{1}{a}\int_{t_*}^{t} e^{\beta(t-s)} f(y-\alpha(x-s),s)\, ds$$

Bu yerda α,β— (4) integralni hisoblashda hosil bo'luvchi koeffitsientlar (xususiy holda o'zgarmas)

Misol. Quyidagi transport tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching.

$$au_t \pm bu_x = 0\,,\ (x,t) \in D, a > 0, b > 0 \qquad (5)$$

$$u(l,t) = \psi(t)\,,\ x = l \qquad (6)$$

Yechish: Avvalo (5) tenglamaning xarakteristikasini topamiz:

$$\frac{dt}{a} = \frac{dx}{b} \to \xi = x - \frac{b}{a}t = const.$$

Bu yerdan umumiy yechimni topsak

$$u(x,t) = F(x \mp \frac{b}{a}t)$$

dan iborat bo'lib bo'ladi. Umumiy yechimni chegaraviy shartga tekshirib $u(l,t) = F(l \mp \frac{b}{a}t)$ hamda $z = l \mp \frac{b}{a}t$ ifodani t ga nisbatan yechamiz va F hamda ψ funksiyalar orasidagi bog'liqlikni topamiz, u holda

$$F(z) = \psi\left(\frac{b}{a}(l \mp z)\right)$$

bo'lib, bundan chegaraviy masala yechimi

$$u(x,t) = \psi\left(t \mp \frac{a}{b}(x - l)\right) \quad (7)$$

formula yordamida topilar ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI: (REFERENCES)

1. Hopf E. Comm. On pure and appl. math., 1950, 3, N3, 201-230.
2. John C. Strikwerda. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Second Edition, 2004.
www. ec-securehost.com/SIAM/ot88.html.
3. Peter J. Olver. "Introduction to Partial Differential Equations", 2012, 544 p.
www.math.umn.edu/~olver/pdn.html
4. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным урав-нениям с частными производными первого порядка. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 416 с.