# БЮРГЕРС ТИПИДАГИ ИККИ ТЕЗЛИКЛИ ГЕДРОДИНАМИК ТЕНГЛАМА

**Махмасоатов Муҳиддин Ғайрат ўғли**
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети
стажёр-ўқитувчи
m.makhmasoatov@g.nsu.ru

## АННОТАТСИЯ

Ушбу мақолада турли хил суюқликлар ва газлар динамикасига оид Бюргерс типидаги икки тезликли гедродинамик тенглама ва унинг ечимлари ўрганилган. Тенгламанинг ечимлари ва графиги ҳосил қилинди.

## ABSTRACT

In this paper, the Buergers-type two-velocity hydrodynamic equation for the dynamics of various liquids and gases and its solutions are studied. The solutions and graph of the equation were generated.

## KIRISH

Механикада, кўп ўзгаривчили фазода узилишнинг парчаланиши муаммоси ностационар тенгламаларнинг аналитик ечимларини қуриш учун қўйилади. Бундай тенгламалар муайян махсус ҳолатларда, масалан, идиал газ ёки саёз сув назариясида аниқ ечимга ега. Бироқ, кўпгина жисмоний вазифалар системасининг кўп фазали табиатини ҳисобга олишни талаб қилади. Шундай қилиб, гидро - ва газ динамикасида, шунингдек аеродинамикада ва бошқа амалий соҳаларда кўп фазали ҳодисаларни тасвирлаш учун Riemann типидаги мураккаб математик тенгламалар сестемаларини ечиш талаб қилинади.

Тўлқинларнинг ночизиқлигини, масалан, кучли турбулентлик билан тасвирлашнинг катта қийинлиги назариянинг кейинги ривожланиш йўлини – ночизиқ тасодифий тўлқинларнинг мураккаб тенгламаларини анча содда модел тенгламаларига алмаштиришни белгилаб берди. Бюргерс тенгламаси бундай модель тенгламаларига мисол бўлиб, бу сестеманинг махсус ҳолати сифатида ифодаланиши мумкин.

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (1)$$

a) b)

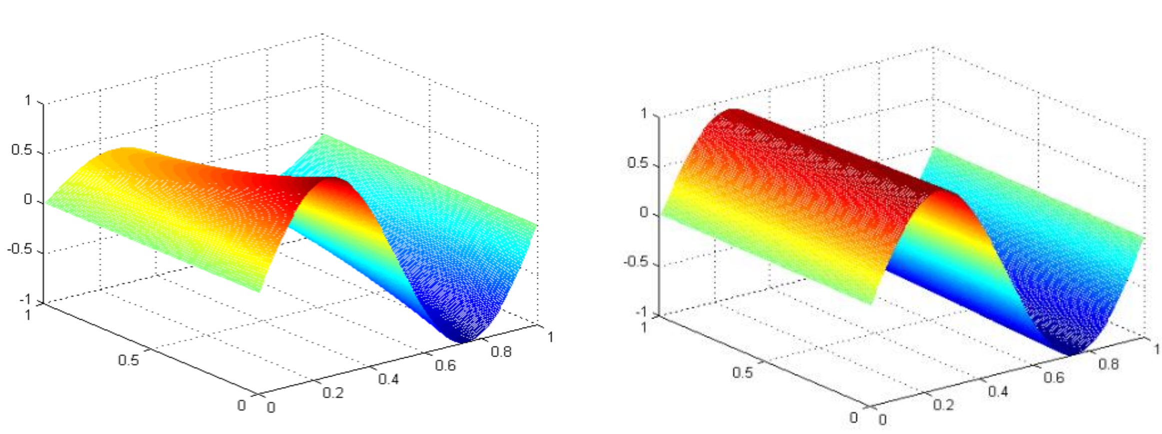


**Рисунок 1.** (a) Вейвлет Галеркиннинг $\nu = 0.025$, бўлганда Бюргерс тенгламасининг графиги; (b) Вейвлет Галеркиннинг $\nu = 0.0025$, бўлганда Бюргерс тенгламасининг графиги

Кўп фазали муҳит учун Эйлера ва Навье-Стокс тенгламалари системасининг умумлашмаси сифатида ишлатилади (қуйида).

Бир ўлчовли ҳолатда бу система қуйидагича ифодаланади. [11]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \eta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bv + F, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \eta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\rho_2}{\rho_1}u + F. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \nu u_{xx} - bv, \\ v_t + vv_x = \tilde{\nu} v_{xx} + \tilde{b}u. \end{cases} \quad (1)$$

Бу ерда, $u$ ва $v$ зичликлари $\rho_1$ ва $\rho_2$ бўлган системанинг тезликлари ва $\rho = \rho_1 + \rho_2$, тенглик ўринли. $\tilde{b} = \frac{\rho_1}{\rho_2}b$, $b$ ёпишқоқлик коеффициенти, $\nu$ ва $\tilde{\nu}$ константалар икки фазодаги суюқликларни ифодалайди.

Риманн системаси (1), (2) босимсиз икки тезликли гидродинамикадир.

Бу тенгламалар системаси (1), (2) қуйидаги таъсирларни ўз ичига олади: ночизиқли енергия дисперсияси, системадаги турли суюқликларни харакатини ва суюқликнинг ёпишкоклик коэффициентини.

**Риманн дифференсиал тенгламалар системаси учун Коши масалани ечиш**

Бюргерс тенгламасининг оғирлик кучи ($F(t,x) = 0$), $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)\colon 0 \le t \le N, x \in 0 < x \le M\}$ оралиқлардаги (1), (2) куринишдаги Риманн системасини кўриб чиқамиз. Бошланғич шартлар қуйидагилардан иборат.

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad v|_{t=0} = v_0(x), \qquad x \in (0, M]. \quad (3)$$

(1), (2) тенгламалар системасининг $t$ бўйлаб бир marta дифференсиалланувчи ва $x$ бўйлаб икки marta узлуксиз дифференсиалланувчи бўлган Коши масаласининг ечимларини қидирамиз $u(t,x), v(t,x) \in C^{1,2}(\Pi_{[0,T]})$.

(1) ва (2) системалар каррали тўлқиннинг бир ярим даврини тасвирловчи оддий ечимга ега:

$$\begin{cases} u = U(t)\left(1 - \frac{\omega x}{\pi}\right), & 0 < \omega x \leq \pi, \\ v = V(t)\left(1 - \frac{\omega x}{\pi}\right), & 0 < \omega x \leq \pi, \end{cases} \quad (4)$$

Иккинчи ярим давр минтақа учун (4) ва (5) нинг давоми сифатида белгиланган-бошланғич тарзда $-\pi \leq \omega x < 0$.

(4), (5) ни (1), (2), қуйиб U(t), V(t) лар учун қуйидаги дифференсиал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} - \frac{\omega}{\pi} U^2 = -bV, \\ \frac{dV}{dt} - \frac{\omega}{\pi} V^2 = b\varepsilon U. \end{cases} \quad (6)$$

(6), (7) системани қуйидаги бошланғич шартлар билан куриб чикамиз.

$$U|_{t=0} = U_0, \quad V|_{t=0} = V_0. \quad (8)$$

(6) ва (7) тенгламаларни қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$\begin{cases} U' = \frac{\omega}{\pi} U^2 + bV, \\ V' = \frac{\omega}{\pi} V^2 - b\varepsilon V. \end{cases} \quad (9)$$

(9) чи тенгламадан V ни топамиз.

$V = \frac{1}{b}\left(U' - \frac{\omega}{\pi} U^2\right)$, ва (10) га олиб бориб қўямиз.

Функсиянинг графиги қуйидаги ко'ринишда бо'лади.

$$\frac{1}{b}\left(U'' - 2\frac{\omega}{\pi} UU' + bU'\right) = \frac{\omega}{\pi b^2}\left(U' - \frac{\omega}{\pi} U^2 + bU\right)^2 + b\varepsilon U - \varepsilon\left(U' - \frac{\omega}{\pi} U^2 + \right.$$
$$\left. + bU\right)$$

$$\frac{U''}{b} - 2\frac{\omega}{b\pi} UU' + U' = \frac{\omega}{\pi b^2}\left(U'^2 + \frac{\omega^2}{\pi^2} U^4 + b^2 U^2 - 2\frac{\omega}{\pi} U'U^2 - 2\frac{b\omega}{\pi} U^3 + \right.$$
$$\left. + 2bU'U\right) + b\varepsilon U - \varepsilon U' + \frac{\varepsilon\omega}{\pi} U^2 - b\varepsilon U$$

$$\frac{U''}{b} - 2\frac{\omega}{b\pi} UU' + U' = \frac{\omega}{\pi b^2} U'^2 + \frac{\omega^3}{\pi^3 b^2} U^4 + \frac{\omega}{\pi} U^2 - \frac{2\omega^2}{\pi^2 b^2} U'U^2 - \frac{2\omega^2}{\pi^2 b} U^3 +$$
$$+ \frac{2\omega}{\pi b} U'U - \varepsilon U' + \frac{\varepsilon\omega}{\pi} U^2$$

Бундан кийин $U'$ ни $Z$ орқали белгилаш киритсак, у ҳолда $U''$ қуйидаги куринишга ега булади.

$$U' = Z(U), \quad U'' = \frac{\partial U'}{\partial t} = \frac{\partial Z(U)}{\partial t} = \frac{\partial Z(U)}{\partial U} * \frac{\partial U}{\partial t} = Z'U' = Z'Z \quad (11)$$

$$\frac{1}{b} Z'Z - \frac{2\omega}{b\pi} UZ + Z = \frac{\omega}{\pi b^2} Z^2 + \frac{\omega^3}{\pi^3 b^2} U^4 + \frac{\omega}{\pi} U^2 - \frac{2\omega^2}{\pi^2 b^2} ZU^2 - \frac{2\omega^2}{\pi^2 b} U^3 + \frac{2\omega}{\pi b} ZU -$$
$$- \varepsilon Z + \frac{\varepsilon\omega}{\pi} U^2$$

$$\frac{1}{b}Z'Z-\frac{\omega}{\pi b^2}Z^2+\left(1-\frac{4\omega}{b\pi}U+\frac{2\omega^2}{\pi^2 b^2}U^2+\varepsilon\right)Z-\frac{\omega^3}{\pi^3 b^2}U^4-\frac{\omega}{\pi}U^2+\frac{2\omega^2}{\pi^2 b}U^3-$$
$$-\frac{\varepsilon\omega}{\pi}U^2=0$$
$$\frac{1}{b}Z'Z-\frac{\omega}{\pi b^2}Z^2+\left((1+\varepsilon)+\frac{2\omega}{b\pi}U\left(\frac{\omega}{b\pi}U-2\right)\right)Z-\frac{\omega}{\pi}U^2(1+\varepsilon)-$$
$$-\frac{\omega^2}{\pi^2 b}U^3\left(\frac{\omega}{b\pi}U-2\right)=0$$
$$\frac{1}{b}Z'Z-\frac{\omega}{\pi b^2}Z^2+(1+\varepsilon)\left(Z-\frac{\omega}{\pi}U^2\right)+\frac{\omega}{b\pi}U\left(\frac{\omega}{b\pi}U-2\right)\left(2Z-\frac{\omega}{\pi}U^2\right)=0$$
$$\frac{1}{b}Z'Z-\frac{\omega}{\pi b^2}Z^2+\frac{\omega}{b\pi}U\left(\frac{\omega}{b\pi}U-2\right)Z+\left(Z-\frac{\omega}{\pi}U^2\right)\left(1+\varepsilon+\frac{\omega^2}{\pi^2 b^2}U^2-\right.$$
$$\left.-2\frac{\omega}{b\pi}U\right)=0$$

Юқоридаги ўшбу тенгламалардан биз қуйидаги ечимни топамиз.

$$Z=\frac{\omega}{\pi}U^2,$$
$$\frac{1}{b}Z'Z-\frac{\omega}{\pi b^2}Z^2+\frac{\omega}{b\pi}U\left(\frac{\omega}{b\pi}U-2\right)Z=0,$$

Ва ниҳоят, бу функция қуйидаги шаклда бўлади.

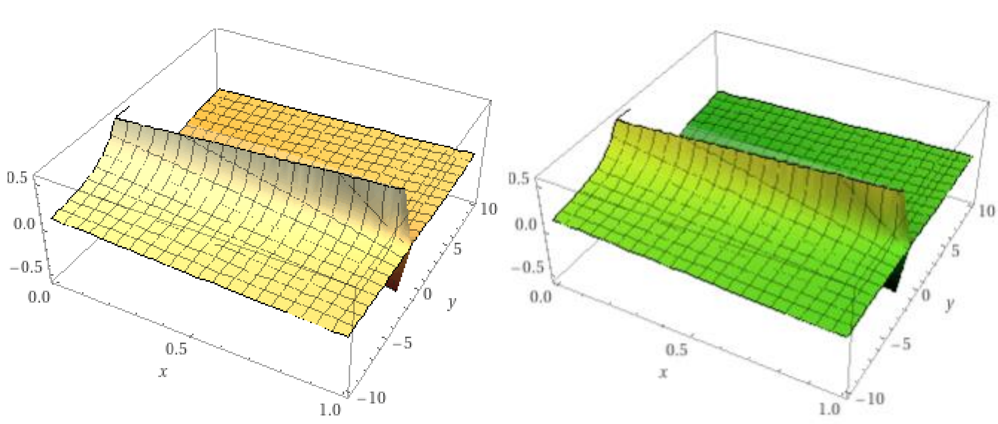
$$U'=\frac{\omega}{\pi}U^2,$$

Ва шу усул билан биз V функциясини топамиз.

$$V'=\frac{\omega}{\pi}V^2,$$

Шундан сўнг, $U(t)$, $V(t)$ функцияларни (4), (5) га олиб бориб Риманн типидаги системасинг умумий ечимини ҳосил қиламиз.

A)




B)

**Расм 1.** (Фронталь куриниш $u(x,t)$ и $v(x,t)$)

a)− $u(x,t)$ функция b)− $v(x,t)$ функция. Бу ерда $\omega = \pi$, $U_0 = 1$, $V_0 = 1$.

**ХУЛОСА**

Шундай қилиб, Бюргерс типидаги икки тезликли гедродинамик тенглама ва унинг ечимлари ўрганилди. Ушбу сестема икки суюқликли муҳит учун Навиер-Стокес сестемаидан босимнинг ёқлиги, қуйи сестеманинг ёпишқоқлиги ва сиқилмаслиги шартлари билан фарқ қилади. Таклиф етилаётган тенгламалар сестеманинг ҳаракатланувчи тўлқинлар кўринишидаги ечими кўриб чиқилди. Унинг ечими учун формула чизиқли бўлмаган тенгламалар сестемаи шаклида олинди.

**ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙҲАТИ: (REFERENCES)**

https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=mSR8wVcAAAAJ&citation_for_view=mSR8wVcAAAAJ:u-x6o8ySG0sC

https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=mSR8wVcAAAAJ&citation_for_view=mSR8wVcAAAAJ:d1gkVwhDpl0C