К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

Т.К. Хожиев
НУУз. tojiddin542018@gmail.com

Исломов Б.А.
НУУз. Студент 2-курса, ф-та Прикладной математики и ИТ.
boburislomov496@gmail.com

В настоящей работе, рассматривается двухмерная систем нелинейных стационарных уравнений теплопроводности [1-2]:

$$f_i(u_{3-i})\sum_{j=1}^{2} a_{i,2j-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,2j}\frac{\partial}{\partial x_j}u_i\right) = F_i(x_1,x_2,u_1,u_2); \qquad (1)$$

в прямоугольной области $Q = \{a_1 \le x_1 \le b_1, c_1 \le x_2 \le d_1\}$ при граничных условиях первого рода:

$$u_i(a_1,x_2) = \varphi_{i\ 2j-1}; \qquad (2)$$

$$u_i(b_1,x_2) = \varphi_{i\ 2j}; \qquad (3)$$

$$u_i(x_1,c_1) = \varphi_{i\ 2j-1}; \qquad (4)$$

$$u_i(x_1,d_1) = \varphi_{i\ 2j}; \qquad (5)$$

которые в дальнейшем обобщаются для других граничных условиях второго и третьего рода, где $f_i(u_{3-i})$, $a_{i,2j-1}(x_1,x_2,u_{3-i})$, $a_{i,2j}(x_1,x_2,u_{3-i})$,

$F_i(x_1,x_2,u_1,u_2)$ и φ_{ik} – являются непрерывными функциями в Q, $(i,j = 1,2; k = \overline{1,4})$.

Известно, что такие постановки задач встречаются для определения взаимодействующих электростатических и температурных полей в электро-химических защитах металлических сооружений от почвенной коррозии. Поскольку ионы раствора, которые находятся вокруг металлического сооружения в хаотическом движении, то получить аналитического решения в такой пространственной постановке задачи вида (1)-(5), оказывается достаточно сложным. Поэтому, обычно такие нелинейные задачи решаются различными итерационными методами, для которых скорость сходимости итерационного процесса зависит от многих факторов, один из которых является выбор начального приближения [3].

Для решения данной двухмерной стационарной задачи (1)-(5) применяется метод установления, приводя уравнения (1) к виду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(u_{3-i})\sum_{j=1}^{2} a_{i,2j-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,2j}\frac{\partial}{\partial x_j}u_i\right) - F_i(x_1,x_2,u_1,u_2); \qquad (8)$$

с дополнительными начальными условиями

$$u_i(x_1,x_2,t_0) = \psi_i(x_1,x_2), \qquad (9)$$

где $\psi_i(x_1,x_2)$ –произвольная выбираемая функция.

В качестве данного начального приближения $\psi_i(x_1,x_2)$, в отличие от других способов, берется решение уравнения

$$\Delta u_i = 0 \qquad (10)$$

по методу Фурье [2].

Для численного решения систем уравнений (8) при начальных (9) и граничных условиях (2)-(5), применяется метод переменных направлений, с весовыми коэффициентами θ_1 и θ_2 [3]. Тогда эти уравнения в разностном виде выглядят следующим образом:

$$\frac{\tilde{u}_{ij}-u_{ij}^s}{\tau} = f_1(v_{ij}^s)\left\{\frac{1}{2}(a_{11\,i+1}^s + a_{11\,i}^s)\left(a_{12\,i+1j}^s\frac{\tilde{u}_{i+1j}-\tilde{u}_{ij}}{h^2} - a_{12\,ij}^s\frac{\tilde{u}_{ij}-\tilde{u}_{i-1j}}{h^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(1-\theta_1)(a_{13\,i\,j+1}^s + a_{13\,ij}^s)\left(a_{14\,ij+1}^s\frac{u_{ij+1}^s-u_{ij}^s}{l^2} - a_{14\,ij}^s\frac{u_{ij}^s-u_{ij-1}^s}{l^2}\right)\right\} -$$
$$-F_1(x_i,y_j,u_{ij}^s,v_{ij}^s) - \mu_1 F'_{1u}(x_i,y_j,u_{ij}^s,v_{ij}^s)(\tilde{u}_{ij}-u_{ij}^s), \qquad (11)$$

$$\frac{u_{ij}^{s+1}-\tilde{u}_{ij}}{\tau} = f_1(v_{ij}^s)\left\{\frac{1}{2}(1-\theta_1)(\tilde{a}_{11\,i+1}\right.$$
$$+\tilde{a}_{11\,i})\left(\tilde{a}_{12\,i+1j}\frac{\tilde{u}_{i+1j}-\tilde{u}_{ij}}{h^2} - \tilde{a}_{12\,ij}\frac{\tilde{u}_{ij}-\tilde{u}_{i-1j}}{h^2}\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{2}(\tilde{a}_{13\,i\,j+1}+\tilde{a}_{13\,ij})\left(\tilde{a}_{14\,ij+1}\frac{u_{ij+1}^{s+1}-u_{ij}^{s+1}}{l^2} - \tilde{a}_{14\,ij}\frac{u_{ij}^{s+1}-u_{ij-1}^{s+1}}{l^2}\right)\right\} -$$
$$-F_1(x_i,y_j,\tilde{u}_{ij},v_{ij}^s) - \mu_1 F'_{1u}(x_i,y_j,\tilde{u}_{ij},v_{ij}^s)(u_{ij}^{s+1}-\tilde{u}_{ij}), \qquad (12)$$

Теперь по второму уравнению (8)получим:

$$\frac{\tilde{v}_{ij}-v_{ij}^s}{\tau} = f_2(u_{ij}^{s+1})\left\{\frac{1}{2}(a_{21\,i+1}^s + a_{21\,i}^s)\left(a_{22\,i+1j}^s\frac{\tilde{v}_{i+1j}-\tilde{v}_{ij}}{h^2} - a_{22\,ij}^s\frac{\tilde{v}_{ij}-\tilde{v}_{i-1j}}{h^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(1-\theta_2)(a_{23\,i\,j+1}^s + a_{23\,ij}^s)\left(a_{24\,ij+1}^s\frac{v_{ij+1}^s-v_{ij}^s}{l^2} - a_{24\,ij}^s\frac{v_{ij}^s-v_{ij-1}^s}{l^2}\right)\right\} -$$
$$-F_2(x_i,y_j,u_{ij}^{s+1},v_{ij}^s) - \mu_2 F'_{2v}(x_i,y_j,u_{ij}^{s+1},v_{ij}^s)(\tilde{v}_{ij}-v_{ij}^s), \qquad (13)$$

$$\frac{v_{ij}^{s+1}-\tilde{v}_{ij}}{\tau} = f_2(u_{ij}^{s+1})\left\{\frac{1}{2}(1-\theta_2)(\tilde{a}_{21\,i+1}\right.$$
$$+\tilde{a}_{21\,i})\left(\tilde{a}_{22\,i+1j}\frac{\tilde{v}_{i+1j}-\tilde{v}_{ij}}{h^2} - \tilde{a}_{22\,ij}\frac{\tilde{v}_{ij}-\tilde{v}_{i-1j}}{h^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\tilde{a}_{23\,i\,j+1}+\tilde{a}_{23\,ij}\right)\left(\tilde{a}_{24\,ij+1}\frac{v_{ij+1}^{s+1}-v_{ij}^{s+1}}{l^2}-\tilde{a}_{24\,ij}\frac{v_{ij}^{s+1}-v_{ij-1}^{s+1}}{l^2}\right)\Big\}-$$

$$-F_2\left(x_i,y_j,u_{ij}^{s+1},\tilde{v}_{ij}\right)-\mu_2F'_{2v}\left(x_i,y_j,u_{ij}^{s+1},\tilde{v}_{ij}\right)\left(v_{ij}^{s+1}-\tilde{v}_{ij}\right). \qquad (14)$$

Отсюда полученная система уравнений имеет вид:

$$A_1\tilde{u}_{i-1j}+B_1\tilde{u}_{ij}+C_1\tilde{u}_{i+1j}=D_1, \qquad (15)$$

$$A_2u_{ij-1}^{s+1}+B_2u_{ij}^{s+1}+C_2u_{ij+1}^{s+1}=D_2, \qquad (16)$$

$$A_3\tilde{v}_{i-1j}+B_3\tilde{v}_{ij}+C_3\tilde{v}_{i+1j}=D_3, \qquad (17)$$

$$A_4v_{ij-1}^{s+1}+B_4v_{ij}^{s+1}+C_4v_{ij+1}^{s+1}=D_4, \qquad (18)$$

где

$$A_1=-\tau f_1\left(v_{ij}^s\right)\frac{1}{2h^2}\left(a_{11\,i+1}^s+a_{11\,i}^s\right)a_{12\,ij}^s;$$

$$B_1=1+\tau\left[\begin{matrix}f_1\left(v_{ij}^s\right)\dfrac{1}{2h^2}\left(a_{11\,i+1}^s+a_{11\,i}^s\right)\left(a_{12\,i+1j}^s+a_{12\,ij}^s\right)\\ +\mu_1F'_{1u}\left(x_i,y_j,u_{ij}^s,v_{ij}^s\right)\end{matrix}\right];$$

$$C_1=-\tau f_1\left(v_{ij}^s\right)\frac{1}{2h^2}\left(a_{11\,i+1}^s+a_{11\,i}^s\right)a_{12\,ij}^s,$$

$$D_1=\tilde{u}_{ij}+\frac{1}{2}\tau f_1\left(v_{ij}^s\right)(1-\theta_1).$$

$$\left(\tilde{a}_{11\,i+1}+\tilde{a}_{11\,i}\right)\left(\tilde{a}_{12\,i+1j}\frac{\tilde{u}_{i+1j}-\tilde{u}_{ij}}{h^2}-\tilde{a}_{12\,ij}\frac{\tilde{u}_{ij}-\tilde{u}_{i-1j}}{h^2}\right)$$

$$-\tau\left[F_1\left(x_i,y_j,\tilde{u}_{ij},v_{ij}^s\right)-\mu_1F'_{1u}\left(x_i,y_j,\tilde{u}_{ij},v_{ij}^s\right)\tilde{u}_{ij}\right].$$

$$A_2=-\frac{\tau}{2l^2}f_1\left(v_{ij}^s\right)\left(\tilde{a}_{13\,i\,j+1}+\tilde{a}_{13\,ij}\right)\tilde{a}_{14\,ij},$$

$$B_2=\left[1+\frac{\tau}{2l^2}f_1\left(v_{ij}^s\right)\left(\tilde{a}_{13\,i\,j+1}+\tilde{a}_{13\,ij}\right)\left(\tilde{a}_{14\,ij+1}+\tilde{a}_{14\,ij}\right)+\tau\mu_1F'_{1u}\left(x_i,y_j,\tilde{u}_{ij},v_{ij}^s\right)\right],$$

$$C_2=-\frac{\tau}{2l^2}f_1\left(v_{ij}^s\right)\left(\tilde{a}_{13\,i\,j+1}+\tilde{a}_{13\,ij}\right)\tilde{a}_{14\,ij},$$

$$D_2=\tilde{u}_{ij}+\frac{1}{2h^2}\tau f_1\left(v_{ij}^s\right)(1-\theta_1)$$

$$\left(\tilde{a}_{11\,i+1}+\tilde{a}_{11\,i}\right)\left(\tilde{a}_{12\,i+1j}\left(\tilde{u}_{i+1j}-\tilde{u}_{ij}\right)-\tilde{a}_{12\,ij}\left(\tilde{u}_{ij}-\tilde{u}_{i-1j}\right)\right)$$

$$-\tau\left[F_1\left(x_i,y_j,\tilde{u}_{ij},v_{ij}^s\right)-\mu_1F'_{1u}\left(x_i,y_j,\tilde{u}_{ij},v_{ij}^s\right)\tilde{u}_{ij}\right],$$

$$A_3=-\tau f_2\left(u_{ij}^{s+1}\right)\frac{1}{2h^2}\left(a_{21\,i+1}^s+a_{21\,i}^s\right)a_{22\,ij}^s,$$

$$B_3=\left[1+\tau f_2\left(u_{ij}^{s+1}\right)\frac{1}{2h^2}\left(a_{21\,i+1}^s+a_{21\,i}^s\right)\left(a_{22\,i+1j}^s+a_{22\,ij}^s\right)+\right.$$

$$\left.\tau\mu_2F'_{2v}\left(x_i,y_j,u_{ij}^{s+1},v_{ij}^s\right)\right],$$

$$C_3=-\tau f_2\left(u_{ij}^{s+1}\right)\frac{1}{2h^2}\left(a_{21\,i+1}^s+a_{21\,i}^s\right)a_{22\,ij}^s,$$

$$D_3=v_{ij}^s+\frac{1}{2l^2}(1-\theta_2)\left(a_{23\,i\,j+1}^s+a_{23\,ij}^s\right)\left(a_{24\,ij+1}^s\left(v_{ij+1}^s-v_{ij}^s\right)-a_{24\,ij}^s\left(v_{ij}^s-v_{ij-1}^s\right)\right)$$

$$-\tau F_2\left(x_i, y_j, u_{ij}^{s+1}, v_{ij}^s\right) + \tau\mu_2 F'_{2v}\left(x_i, y_j, u_{ij}^{s+1}, v_{ij}^s\right) v_{ij}^s \ ,$$

$$A_4 = -\tau f_2\left(u_{ij}^{s+1}\right)\frac{1}{2l^2}\left(\tilde{a}_{23\ ij+1} + \tilde{a}_{23\ ij}\right)\tilde{a}_{24\ ij}\ ;$$

$$B_4 = [1 + \tau f_2\left(u_{ij}^{s+1}\right)\frac{1}{2h^2}(1-\theta_2)(\tilde{a}_{21\ i+1} + \tilde{a}_{21\ i})(\tilde{a}_{22\ i+1j} + \tilde{a}_{22\ ij})]\ \tilde{v}_{ij},$$

$$C_4 = -\tau f_2\left(u_{ij}^{s+1}\right)\frac{1}{2l^2}\left(\tilde{a}_{23\ ij+1} + \tilde{a}_{23\ ij}\right)\tilde{a}_{24\ ij}\ ;$$

$$D_4 = \tilde{v}_{ij} + \tau f_2\left(u_{ij}^{s+1}\right)\left\{\frac{1}{2h^2}(1-\theta_2)\left(\tilde{a}_{21\ i+1j}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \tilde{a}_{21\ ij}\right)\left(\tilde{a}_{22\ i+1j}(\tilde{v}_{i+1j} - \tilde{v}_{ij}) - \tilde{a}_{22\ ij}(\tilde{v}_{ij}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \tilde{v}_{i-1j})\right)\right\} - \tau F_2\left(x_i, y_j, u_{ij}^{s+1}, v_{ij}^s\right) + \tau\mu_2 F'_{2v}\left(x_i, y_j, u_{ij}^{s+1}, v_{ij}^s\right) v_{ij}^s\ .$$

Решении данной системы (15)-(18) ищется в следующей последовательности:

$$\tilde{u}_{ij} = \alpha_{1\ i}\tilde{u}_{i+1j} + \beta_{1\ i};\ \ i = n-1, n-2, \dots 2; \qquad (19)$$

где $\alpha_{1\ 1} = 0;\ \ \beta_{1\ 1} = \varphi_{11};$

$$\alpha_{1\ i} = -\frac{C_1}{B_1 + A_1\alpha_{1\ i-1}};\ \ ;\qquad \beta_{1\ i} = \frac{D_1 - A_1\beta_{1\ i-1}}{B_1 + A_1\alpha_{1\ i-1}};\qquad i = \overline{2, n-1}:$$

$$u_{ij}^{s+1} = \alpha_{2\ i}u_{ij+1}^{s+1} + \beta_{2\ i};\ \ j = m-1, m-2, \dots, 2; \qquad (20)$$

где $\alpha_{2\ 1} = 0;\ \ \beta_{2\ 1} = \varphi_{13};$

$$\alpha_{2\ j} = -\frac{C_2}{B_2 + A_2\alpha_{2\ i-1}};\qquad \beta_{2\ j} = \frac{D_2 - A_2\beta_{2\ i-1}}{B_2 + A_2\alpha_{2\ i-1}};\qquad j = \overline{2, m-1};$$

$$\tilde{v}_{ij} = \alpha_{3\ i}\tilde{v}_{i+1j} + \beta_{3\ i};\ \ \ i = n-1, n-2, \dots 2; \qquad (21)$$

где $\alpha_{3\ 1} = 0;\ \ \beta_{3\ 1} = \varphi_{21};$

$$\alpha_{3\ i} = -\frac{C_3}{B_3 + A_3\alpha_{3\ i-1}};\qquad \beta_{3\ i} = \frac{D_3 - A_3\beta_{3\ i-1}}{B_3 + A_3\alpha_{3\ i-1}};\qquad i = \overline{2, n-1};$$

$$v_{ij}^{s+1} = \alpha_{4\ i}v_{ij+1}^{s+1} + \beta_{4\ i};\ \ j = m-1, m-2, \dots, 2; \qquad (22)$$

где $\alpha_{4\ 1} = 0;\ \ \beta_{4\ 1} = \varphi_{23}\ ;$

$$\alpha_{4\ j} = -\frac{C_4}{B_4 + A_4\alpha_{4\ i-1}};\qquad \beta_{4\ j} = \frac{D_4 - A_4\beta_{4\ i-1}}{B_4 + A_4\alpha_{4\ i-1}};\ \ j = \overline{2, m-1};$$

Теперь переходим к построению начального приближения, которое получается по решению двумерных систем уравнений (10) по методу Фурье. Предположим, решения системы (10) имеет характер разделяющиеся по переменным x и y . Тогда их можно представить в виде

$$u_i = X_i(x)Y_i(y) \qquad (23)$$

где $X_i(x)$ – функция толко от x , $Y_i(y)$- функция толко от y. Подставляя (23) в (10) получим:

$$\Delta u_i = \frac{d^2X_i}{dx^2}Y_i(y) + \frac{d^2Y_i}{dy^2}X_i(x) = 0. \qquad (24)$$

Отсюда

$$\frac{d^2Y_i}{dy^2}X_i(x) = -\frac{d^2X_i}{dx^2}Y_i(y) \qquad (25)$$

и можно получить

$$\frac{Y_i''}{Y_i} = -\frac{X_i''}{X_i} = \lambda^2 \qquad (26)$$

Здесь, λ – постоянная. Тогда система уравнений (26), относительно X_i и Y_i, приводятся к виду:

$$Y_i'' - \lambda^2 Y_i = 0; \quad X_i'' + \lambda^2 X_i = 0; \qquad (27)$$

Такая система обыкновенных дифференциальных уравнений, связанные только через параметра λ, имеет решение следующего вида:

$$Y_i(y) = A_i e^{\lambda y} + B_i e^{-\lambda y}; \quad X_i(x) = C_i \sin\lambda X + D_i \cos\lambda x \qquad (28)$$

Можно показать, что эти решения удовлетворяют уравнений (27) и в действительности вид решения уравнений (24) имеет вид:

$$u_i(x,y) = X_i(x)Y_i(y) = \left(A_i e^{\lambda y} + B_i e^{-\lambda y}\right)(C_i \sin\lambda X + D_i \cos\lambda x).$$

Для определения значения коэффициентов A_i, B_i, C_i и D_i, используются граничные условия (2)-(5). В частности, для решений (28), требуется выполнение граничных условий:

$$X_i(a_1) = \varphi_{i1}; \ X_i(b_1) = \varphi_{i2}.$$

Отсюда:

$$X_i(a_1) = C_i \cdot \sin\lambda a_1 + D_i \cdot \cos\lambda a_1 = \varphi_{i1},$$
$$X_i(b_1) = C_i \cdot \sin\lambda b_1 + D_i \cdot \cos\lambda b_1 = \varphi_{i2}.$$

Решением данной системы является:

$$D_i = \frac{\varphi_{i1}\cdot\sin\lambda b_1 - \varphi_{i2}\cdot\sin\lambda a_1}{\sin\lambda(b_1-a_1)}, \quad C_i = \frac{\varphi_{i2}\cdot\cos\lambda a_1 - \varphi_{i1}\cos\lambda b_1}{\sin\lambda(b_1-a_1)};$$

где $\sin\lambda(b_1 - a_1) \neq 0$; или $\lambda \neq \frac{k\pi}{b_1-a_1}$. (k=0,1,2..).

В результате $X_i(x)$ имеет вид:

$$X_i(x) = \frac{\varphi_{i2}\cdot\sin\lambda(x-a_1) + \varphi_{i1}\cdot\sin\lambda(b_1-x)}{\sin\lambda(b_1-a_1)}.$$

Теперь для второй функции $Y_i(y)$ по граничним условиям (2) имеем:

$$Y_i(c_1) = \varphi_{i3} = A_i e^{\lambda c_1} + B_i e^{-\lambda c_1}; \quad Y_i(d_1) = \varphi_{i4} = A_i e^{\lambda d_1} + B_i e^{-\lambda d_1}.$$

Нетрудно найти значения коэффициентов A_i и B_i:

$$A_i = \frac{\varphi_{i4}\cdot e^{\lambda(d_1-c_1)} - \varphi_{i3}}{e^{\lambda c_1}\left(e^{2\lambda(d_1-c_1)}-1\right)}; \quad B_i = \frac{\varphi_{i3}\cdot e^{\lambda(d_1-c_1)} - \varphi_{i4}}{\left(e^{2\lambda(d_1-c_1)}-1\right)}\cdot e^{\lambda d_1}.$$

Отсюда:

$$Y_i(y) = \frac{\left(\varphi_{i4}\cdot e^{\lambda(d_1-c_1)} - \varphi_{i3}\right)e^{\lambda(y-c_1)} + \left(\varphi_{i3}\cdot e^{\lambda(d_1-c_1)} - \varphi_{i4}\right)e^{\lambda(d_1-y)}}{\left(e^{2\lambda(d_1-c_1)}-1\right)}.$$

Окончательний вид решения, которые могут использоваться в качестве начального приближения ${u^0}_i(x,y)$:

$$u_i = \frac{\varphi_{i2} \cdot \sin\lambda(x - a_1) + \varphi_{i1} \cdot \sin\lambda(b_1 - x)}{\sin\lambda(b_1 - a_1)} \cdot$$

$$\frac{(\varphi_{i4} \cdot e^{\lambda(d_1-c_1)} - \varphi_{i3}) e^{\lambda(y-c_1)} + (\varphi_{i3} \cdot e^{\lambda(d_1-c_1)} - \varphi_{i4}) e^{\lambda(d_1-y)}}{(e^{2\lambda(d_1-c_1)} - 1)},$$

где $\lambda \neq k\pi$.

Методика реализована в виде комплекс программ на языке C# и ориентирована для решение ряд стационарних задач теплопроводности. Результаты расчетов показывают хорошую сходимость и точность метода. Применение описанного метода позволяет получить порядки точности, близкие ко вторым и выше.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ: (REFERENCES)

1. М.Арипов, А.Матякубов, Д.Назирова, Т.Хожиев. Численное моделирование системы взаимной диффузии – реакции. Материалы международной конференции: Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач. – 2007. Самарканд. Октябрь 19-20. Стр.12-13.
2. T.K.Khojiev, N.N. Karimov. Numerical modeling of a nonlinear heat conduction problem by the Fourier method. NUUz. Contemporary Mathematics and its Applications-2021.
3. А.А. Самарский. Теория разностных схем.М.: Наука, 1983.\
4. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=pNhiJv0AAAAJ&citation_for_view=pNhiJv0AAAAJ:qjMakFHDy7sC
5. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=pNhiJv0AAAAJ&citation_for_view=pNhiJv0AAAAJ:UeHWp8X0CEIC
6. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=pNhiJv0AAAAJ&citation_for_view=pNhiJv0AAAAJ:IjCSPb-OGe4C
7. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=pNhiJv0AAAAJ&citation_for_view=pNhiJv0AAAAJ:IjCSPb-OGe4C
8. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=pNhiJv0AAAAJ&citation_for_view=pNhiJv0AAAAJ:d1gkVwhDpl0C
9. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=pNhiJv0AAAAJ&citation_for_view=pNhiJv0AAAAJ:u-x6o8ySG0sC
10. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=pNhiJv0AAAAJ&citation_for_view=pNhiJv0AAAAJ:2osOgNQ5qMEC
11. https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=pNhiJv0AAAAJ&citation_for_view=pNhiJv0AAAAJ:u5HHmVD_uO8C