

GIDRODINAMIK DISPERSIYA TENGLAMASINI HAR-XIL AYIRMALI SXEMALARNI QO‘LLAB SONLI MODELLASHTIRISH

Xolsaidov Nuriddin Sa’dulla o‘g‘li

E-mail: nuriddin0924@gmail.com

ANNOTATSIYA

Suyuqlikning harakati turli xil xususiyatlar bilan boshqariladi. Suyuqlik oqimining xatti-harakatlarini yoritish va matematik modelni ishlab chiqish uchun ushbu xususiyatlar fizik va raqamli soha o‘rtasidagi o‘tishni ta’minlash uchun aniq belgilanishi kerak. Doiraviy quvurlardagi oqim uchun konvektiv diffuziya koeffitsientini hisoblash usulini taklif etdi, bu usul eylar kontsentratsiya maydoni uchun turbulent diffuziyaning yarim empirik tenglamasini qo‘llashga asoslangan (laminar oqim holida bu tenglama aniq molekulyar diffuziya tenglamasi bilan almashtiriladi). J. Teylor tomonidan ochilgan effekt gidrodinamik diffuziya yoki konvektiv (xususiy holda birjinsli tezlik maydoni – turbulent) diffuziya nomini oldi.

Kalit so‘zlar: gidrodinamik dispersiya tenglamalari, konvektsiya-diffuziya tenglamasi, suyuqlik, bosim, tenglama, zichlik, sonli usul

Gidrodinamik dispersiya tenglamalari nostatsionar konvektsiya-diffuziya tenglamalari tipiga kiradi [1]. [1] da statsionar va nostatsionar konvektsiya-diffuziya tenglamalarini chekli ayirmalar usuli bilan sonli tadqiq etish batafsil bayon etilgan. [2] da esa gidrodinamik dispersiya tenglamalarini sonli tadqiq etish uchun bir-nechta chekli ayirmali sxemalar taklif etilgan.

Ushbu ishda quyidagi gidrodinamik dispersiya tenglamasini sonli yechish uchun oshkormas absolyut turg‘un sxemalar tadqiq etiladi

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial c}{\partial x} \right). \quad (9)$$

(1) tenglamani tadqiq etishda oqimning o‘zgarmas gidravlik parametrlari bilan chegaralanamiz, ya’ni $v = \text{const}$ ($v > 0$), $E = \text{const}$. Ayirmali tenglama uchun sonli yechimning sifati birinchi differentsial yaqinlashish bilan, miqdori esa (1) tenglama analitik yechimi bilan taqqoslash orqali tadqiq etiladi. (1) tenglamaning analitik yechimi sifatida quyidagi funksiyani olamiz [3]:

$$c(x, t) = A \cdot \text{erfc} \left[\frac{x - v(t + 0,5)}{2\sqrt{E(t + 0,5)}} \right]. \quad (2)$$

(1) tenglamani sonli modellashtirish uchun (2) analitik yechimdan foydalangan holda boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qo'yib olamiz:

$$c(x,0) = A \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{x - 0,5v}{2\sqrt{0,5E}} \right], \quad (3)$$

$$c(0,t) = A \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{-v(t+0,5)}{2\sqrt{E(t+0,5)}} \right], \quad c(L,t) = A \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{L - v(t+0,5)}{2\sqrt{E(t+0,5)}} \right]. \quad (4)$$

Berilgan tenglamani integrallash uchun keng ma'lum ayirmali sxemalar sinfini quyidagi yondashuv asosida keltirib chiqarish mumkin. Bu tenglama maxsus ko'rinishdagi ushbu parabolik tenglamaga keltiriladi

$$K(x) \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EK(x) \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad (5)$$

bu yerda $K(x) = \exp \left(- \int_0^x \frac{v}{E} d\xi \right)$, (5) tenglamani quyidagi tarzda approksimatsiyalaymiz:

$$\frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\tau} = \frac{E}{h} \left(p \frac{c_{i+1}^{j+1} - c_i^{j+1}}{h} - q \frac{c_i^{j+1} - c_{i-1}^{j+1}}{h} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (6)$$

Bu yerda $\tau - t$ vaqt bo'yicha qadam ($\tau = T/M$); $h - x$ koordinata bo'yicha qadam ($h = L/N$); c_i^j, c_i^{j+1} va boshqalar - bo'yicha qadam; $x_i = ih, t_j = j\tau, t_{j+1} = (j+1)\tau$ va h.k. to'r nuqtalaridagi $c(x_i, t_j)$ funksiya qiymatlari. p, q koeffitsiyentlarni hisoblash yo'llari har-bir aniq ayirmali sxema tanlanishi bilan alohida aniqlanadi.

Masalani sonli yechish uchun quyidagi ma'lumotlardan foydalanildi: $T = 2$ soat, $L = 10$ km, $E = 0,072$ km²/soat, $v = 1,8$ km/soat, $A = 0,1, N = 100, M = 80$.

1-sxema. O'zgaruvchan koeffitsiyentli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun oddiy oshkormas ayirmali sxema. p, q koeffitsiyentlar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi

$$p = \frac{K_{i+1/2}}{0,5(K_{i+1/2} + K_{i-1/2})}, \quad q = \frac{K_{i-1/2}}{0,5(K_{i+1/2} + K_{i-1/2})},$$

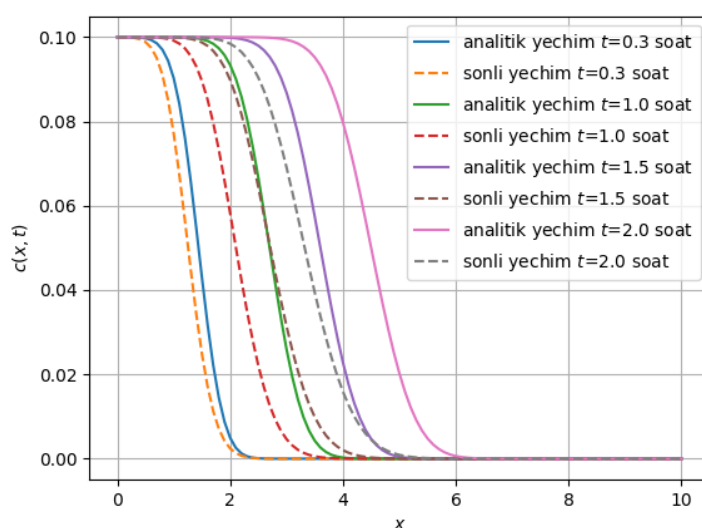
yoki $K(x)$ funksiya ko'rinishiga qarasak quyidagiga ega bo'lamiz

$$p = 1 - \operatorname{th}(v), \quad q = 1 + \operatorname{th}(v),$$

bu yerda

$$v = \frac{vh}{2E}. \quad (7)$$

v ning istalgan qiymati uchun qaralayotgan ayirmali sxema maksimumlik printsiptiga ega bo'ladi va ayirmali tenglamalar sistemasini progonka usuli bilan [4] samarali yechish mumkin. 1-rasmda $h=0.1$ da turli vaqt qiymatlarida 1-sxema bo'yicha olingan sonli yechim va analitik yechimlar tasvirlangan. Natijalarning ko'rsatishicha (1-rasm) vaqtning kichik qiymatlarida sonli yechim va analitik yechim yaqin kelyapti, ammo vaqtning oshishi bilan sonli yechim va analitik yechim bir-biridan ancha farq qilyapti.



1-rasm. 1-sxema bo'yicha (1) tenglamaning sonli yechimi ($h=0.1$ da)

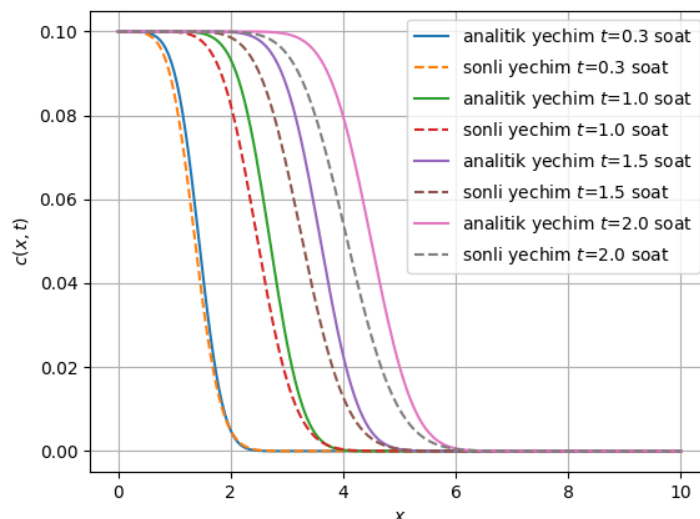
Bu ayirmali sxema uchun birinchi differentsial yaqinlashish quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi [2]

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\text{th}(v)}{v} \frac{\partial c}{\partial x} = E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + O(\tau + h^2). \quad (8)$$

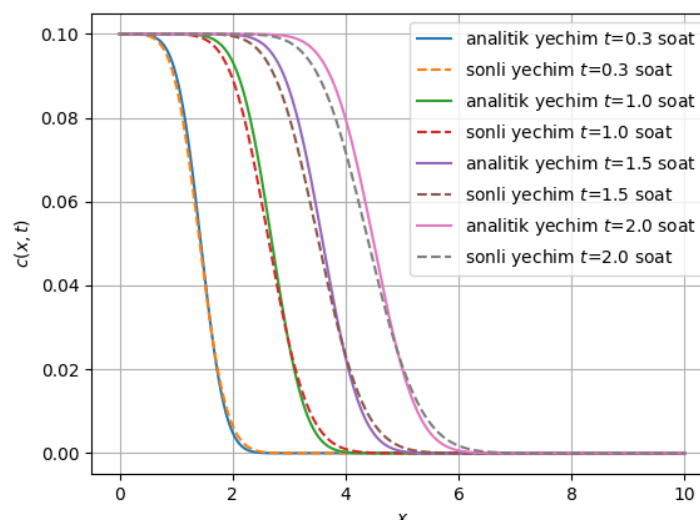
Qaralayotgan jarayonning asosiy xususiyatlaridan biri jarayon tarqalishi asosan konvektiv ko'chish evaziga amalga oshadi. 1-sxema (1) tenglamani x bo'yicha ikkinchi tartib bilan approksimatsiya qilishiga qaramasdan, qanoatlantiradigan natijaga (8) tenglamadan kelib chiqqan holda faqat $\text{th}(v) \approx v$ bo'lganda erishishi mumkin, ya'ni $v \ll 1$ da, yoki quyidagi hol bajarilganda

$$h \ll \frac{2E}{v}. \quad (9)$$

Bundan kelib chiqadiki h qadamni qancha kichik olsak shuncha yaxshi yechimga erishar ekanmiz. 2- va 3-rasmlarda mos ravishda $h=0,05$, $h=0,02$ qadamlardagi sonli yechimlar tasvirlangan.



2-rasm. 1-sxema bo‘yicha (1) tenglamaning sonli yechimi ($h=0.05$ da)



3-rasm. 1-sxema bo‘yicha (1) tenglamaning sonli yechimi ($h=0.02$ da)

2-sxema. Yo‘nalishli ayirmalar bilan birinchi hosilani approssimatsiyalash. p, q

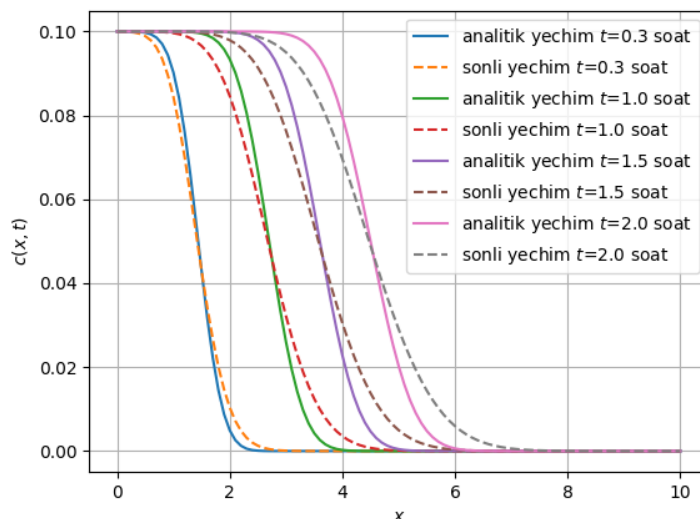
koeffitsiyentlar quyidagi formulalar bo‘yicha hisoblanadi

$$p = 1, \quad q = 1 + 2v.$$

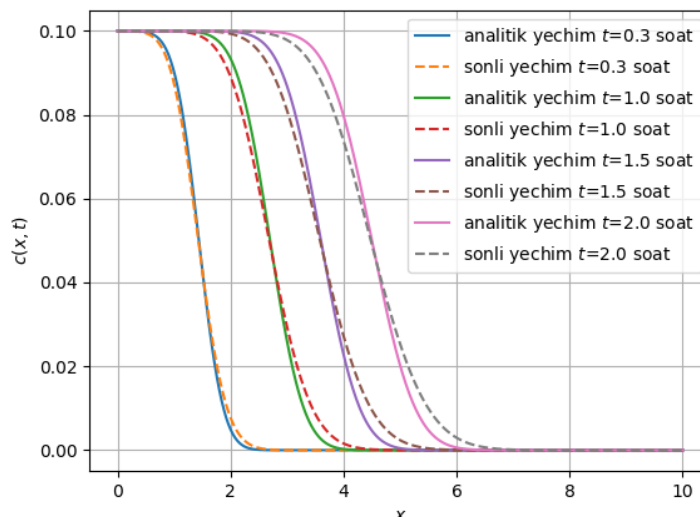
Berilgan holda birinchi differentsial yaqinlashish quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = E(1 + v) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + O(\tau + h^2). \quad (10)$$

4- va 5-rasmlarda 2-sxema bo‘yicha olingan natijalar tasvirlangan. Natijalarnig ko‘rsatishicha h qadam kichrayishi bilan sonli yechim analitik yechimga yaqinlashib boradi.



4-rasm. 2-sxema bo'yicha (1) tenglamaning sonli yechimi ($h=0.1$ da)



5-rasm. 2-sxema bo'yicha (1) tenglamaning sonli yechimi ($h=0.02$ da)

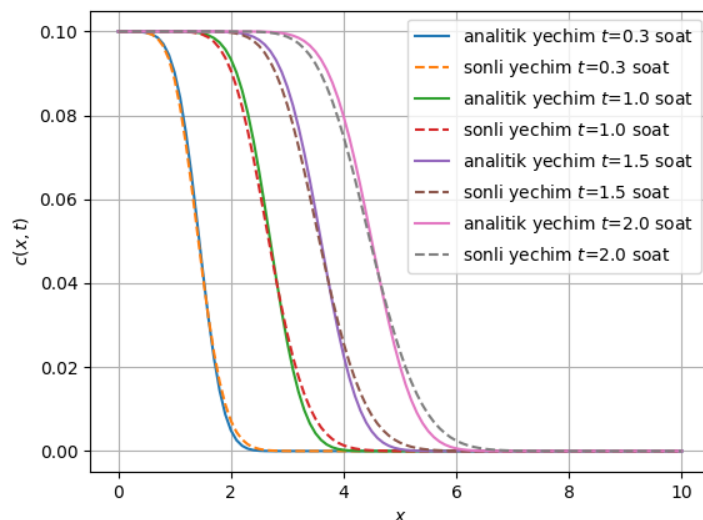
3-sxema. Birinchi hosilani markaziy-ayirma bilan approksimatsiyalash. Qaralayotgan sxema x bo'yicha ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega, p, q koeffitsiyentlar quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadi

$$p = 1 - v, \quad q = 1 + v,$$

birinchi differentsial yaqinlashish quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + O(\tau + h^2). \quad (11)$$

$v < 1$ da ayirmali sxema maksimumlik printsipini qanoatlantiradi. 3-sxema bo'yicha sonli natijalar 6-rasmda tasvirlangan. Natijalarning ko'rsatishicha 3-sxema bo'yicha olingan natijalar h ning katta qiymatlarida ham 1-, 2-sxemalarga nisbatan yaxshiroq natija berganligi ko'rinib turibdi (6-rasm).



6-rasm. 3-sxema bo'yicha (1) tenglamaning sonli yechimi ($h=0.1$ da)

4a-sxema. x bo'yicha ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega, v ning istalgan qiymatlarida maksimumlik printsiptini qanoatlantiradi. p , q koeffitsiyentlar quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadi

$$p = 1 - v + \frac{v^2}{1+v}, \quad q = 1 + v + \frac{v^2}{1+v}.$$

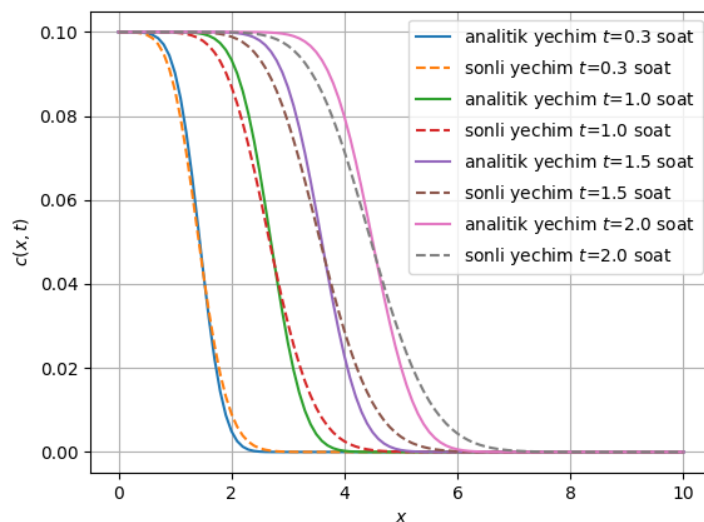
Birinchi differentsial yaqinlashish quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = E \left(1 + \frac{v^2}{1+v} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + O(\tau + h^2). \quad (12)$$

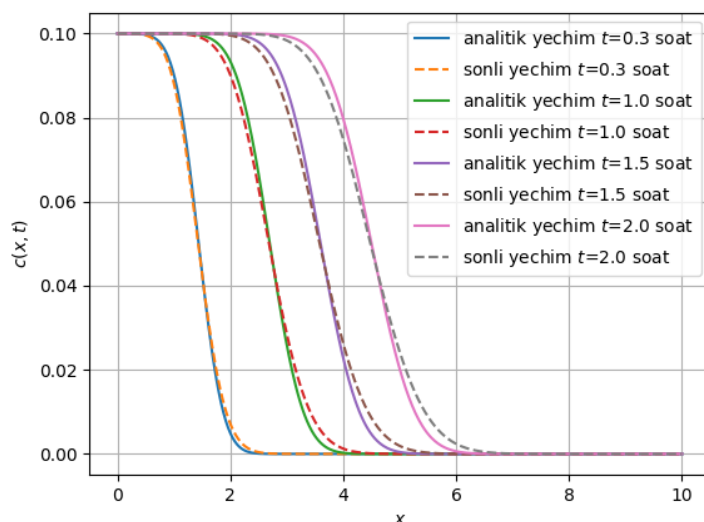
Ayirmali sxema v ning istalgan qiymatlarida monotonlik xossasiga ega. 4a-sxema bo'yicha olingan natijalar 7- va 8-rasmlarda tasvirlangan. h ning kattaroq qiymatlarida sonli yechim analitik yechimda ancha farq qiladi. h ning kichik qiymatlarida esa sonli yechim analitik yechimga yaqin keladi.

4b-sxema. p , q koeffitsiyentlar quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadigan ayirmali sxema ham yuqoridagi xossaga ega bo'ladi

$$p = (1 - v/2)^2, \quad q = (1 + v/2)^2.$$

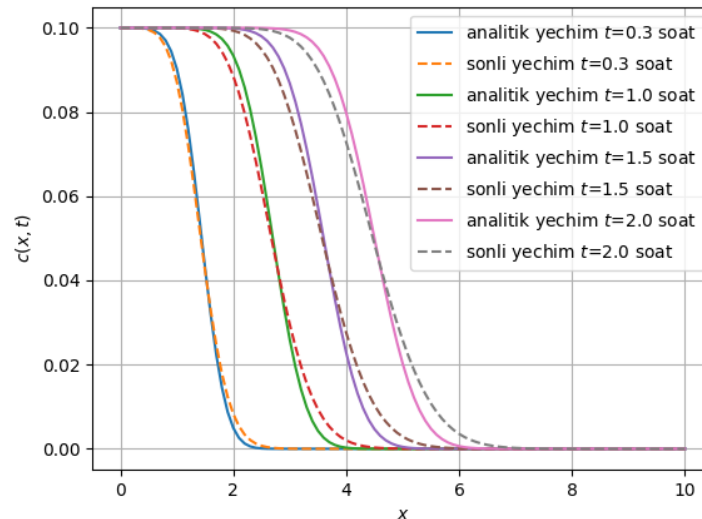


7-rasm. 4a-sxema bo'yicha (1) tenglamaning sonli yechimi ($h=0.1$ da)



8-rasm. 4a-sxema bo'yicha (1) tenglamaning sonli yechimi ($h=0.02$ da)

4b-sxema bo'yicha olingan natijalar 9-rasmda tasvirlangan, natijalarning ko'rsatishicha.



9-rasm. 4b-sxema bo'yicha (1) tenglamaning sonli yechimi ($h=0.1$ da)

Yuqoridagi ayirmali sxemalar yordamida olingan sonli natijalardan ko'rinadiki, (1 – 9 rasmlar) eng yaxshi natijani markaziy ayirmali hosilani qo'llashga asoslangan 3-sxema berar ekan, h ning katta qiymatlarida ham ushbu ayirmali sxema yordamida olingan sonli yechim analitik yechim bilan deyarli ustma-ust tushar ekan (6-rasm).

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI: (REFERENCES)

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. – 248 с.
2. Бабе Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Идентификации моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980. – 161 с.
3. Полянин Л. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. – 616 с.