O‘QUVCHILARNI MODUL BELGISI QATNASHGAN NOSTANDART MASALALARNI YECHISHGA O‘RGATISH BO‘YICHA BA’ZI BIR MULOHAZALAR

A. Axlimirzayev
p.f.n. professor, Andijon davlat universiteti,

M. Mamadjanova
PhD dotsent, Andijon davlat universiteti,
E-mail: mamura.mamadjanova1981@mail.ru

G‘. Sobirov
magistr, Andijon davlat universiteti,

ANNOTASIYA

Ushbu maqolada modul qatnashgan tenglama va tengsizliklar turlarga bo‘lingan hamda ularga doir nostandart shakldagi bir nechta misollar yechimlari bilan keltirilgan.

Kalit so‘zlar: Modulli tenglama, modulli tengsizlik, tenglamaning yechimi, nostandart masala, oraliqlar usuli, haqiqiy sonning moduli, parametr, tenglamalar sistemasi.

O‘zbekiston Respubliksai Prezidentining 2019 yil 9-iyuldagi PQ-4387 sonli qarori respublikamizning barcha ta’lim muassasalarida, jumladan, umumiy o‘rta ta’ilm maktablari va akademik litseylarda matematikani o‘qitishni zamon talablariga mos takomillashtirishni taqozo etadi [1]. Bu vazifaning kechiktirib bo‘lmaydigan dolzarb masalalardan ekanligi respublikamiz prezidenti Sh.M.Mirziyoyevning Oliy majlisga murojaatnomasida ham o‘z aksini topgan[2].

Qo‘yilgan bu vazifalarni amalga oshirishda umumiy o‘rta ta’lim maktablari va akademik litseylar matematika kursida uchraydigan nostandart masalalarning o‘rni g‘oyatda muhimdir. O‘quvchilarni nostandart masalalarni yechishga o‘rgatish ularning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirishga olib keladi, mustaqil fikr yuritish ko‘nikmasini tarkib toptiradi, matematika faniga bo‘lgan qiziqishlarini yanada orttiradi.

Nostandart masalalardan maktab matematika kursining barcha mavzularini o‘rganishda foydalanishi mumkin. Ulardan, asosan, o‘tilgan yangi mavzu bo‘yicha yetarlicha standart masalalar yechilgandan so‘ng foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi. Dars jarayonini bunday tashkil qilish ta’limni samarali bo‘lishini ta’minlaydi.

Shuning uchun ham, biz ushbu maqolada maktab matematika kursida uchraydigan modul belgisi qatnashgan ba'zi bir masalalarni yechish bo'yicha o'z mulohazalarimizni bayon qilamiz.

Maktab matematika kursida uchraydigan modulli tenglama, tengsizlik va boshqa masalalarni yechishda modulning ta'rifidan va uning xossalaridan foydalaniladi.

Quyida bu ta'rifni keltiramiz:

Ta'rif. *a* haqiqiy sonning moduli deb, u musbat bo'lganda o'ziga, manfiy bo'lganda esa *–a* ga teng bo'lgan songa aytiladi. Haqiqiq sonning moduli $|a|$ kabi belgilanadi. Demak, ta'rifga asosan,

$$|a| = \begin{cases} a, & agar\ \ a \geq 0 \\ -a, & agar\ \ a < 0 \end{cases}$$

Modul belgisi qatnashgan ifodalar bilan ish ko'rishda modul ta'rifidan foydalanib ularni modul bekgisisiz yozish asosiy o'rin tutadi. Bunga quyidagi misolni keltiramiz:

1. $y = |x-2| + |x+2|$ ni modul belgisiz yozing.

Yechish: Bunda har bir $|x-2|$ va $|x+2|$ hadlarning ishoralari o'zgarmaydigan oraliqlarni topamiz. Bunday oraliqlar *x=-2* va *x=2* nuqtalar yordamida hosil qilinadi. Ular $(-\infty;-2), [-2;2)\ va\ [2;+\infty)$ lardan iborat.

1) $x \in (-\infty;-2) da\ \ x-2<0$ va $x+2<0$ bo'lgani uchun $|x-2| = -x+2\ \ va\ |x+2| = -x-2$ bo'ladi. Demak, bu holda $y = |x-2| + |x+2| = -x+2-x-2 = -2x$, ya'ni *y=-2x* bo'ladi.

2) $x \in [-2;2)$ da $x-2<0$ va $x+2 \geq 0$ bo'lgani uchun $|x-2| = -x+2\ \ va\ |x+2| = x+2$ bo'ladi. Demak, bu holda $y = |x-2| + |x+2| = -x+2+x+2 = 4$, ya'ni *y=4* bo'ladi.

3) $x \in [2;\infty)$ da $x-2>0$ va $x+2>0$ bo'lgani uchun $|x-2| = x-2\ \ va\ |x+2| = x+2$ bo'ladi. Demak, bu holda $y = |x-2| + |x+2| = x-2+x+2 = 2x$, ya'ni *y=2x* bo'ladi.

Shunday qilib,

$$y = |x-2| + |x+2| = \begin{cases} -2x, & agar\ x < -2\ bo'lsa, \\ 4, & agar -2 \leq x < 2\ bo'lsa \\ 2x, & agar\ x \geq 2\ \ bo'lsa. \end{cases}$$

Modul belgisi qatnashgan tenglamalarni yechishda berilgan tenglamani modul belgisiz, teng kuchli tenglamalar to'plamiga almashtiriladi. Bunda modul ta'rifidan quyidagicha foydalaniladi:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & agar\ f(x) \geq 0\ bo'lsa \\ -f(x), & agar\ f(x) < 0\ bo'lsa \end{cases}$$

Modulli tenglamalarni shartli ravishda quyidagi turlarga bo'lish mumkin:

1. $|f(x)| = a, a \geq 0;$
2. $f|x| = a;$

3. $|f(x)| = f(x);$
4. $|f(x)| = -f(x);$
5. $|f(x)| = \varphi(x);$
6. $|f(x)| = |\varphi(x)|;$
7. $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots. + |f_n(x)| = a;$
8. $\left|\left|\left|f(x)\right| - a_1\right| - a_2\right| - a_3\Big| - \cdots. = k,$ ya'ni, modul belgilari ichma-ich joylashgan hollar.

Oxirgi turga misol keltiramiz.

2. $\Big|\left|\left||x| - 2\right| - 1\right| - 2\Big| = 2$ tenglama yechilsin.

Yechish: Modul ta'rifiga asosan, berilgan tenglama quyidagi tenglamalarga teng kuchli:

$\left|\left||x| - 2\right| - 1\right| - 2 = 2 \ va \ \left|\left||x| - 2\right| - 1\right| - 2 = -2.$ Dastlab birinchi tenglamani yechamiz.

1) $\left|\left||x| - 2\right| - 1\right| = 4$ $\left||x| - 2\right| - 1 = \pm 4$. Bundan $\left||x| - 2\right|$=5 va $\left||x| - 2\right| = -3$ bo'lib, ularning ikkinchisi yechimga ega emas. Endi $\left||x| - 2\right|$=5 ni yechamiz. Bundan $|x| - 2 = 5 \ va \ |x| - 2 = -5$ lar kelib chiqadi. Bularni birinchisidan $|x| = 7$ va ikkinchisidan $|x| = -3$ larni topamiz (ikkinchi tenglama yechimga ega emas). $|x| = 7$ dan $x = \pm 7$ ni topamiz.

2) $\left|\left||x| - 2\right| - 1\right| - 2 = -2,$ $\left|\left||x| - 2\right| - 1\right| = 0,$ $\left||x| - 2\right| - 1 = 0,$

$\left||x| - 2\right| = 1$. Bundan $|x| - 2 = 1 \ \ va \ \ |x| - 2 = -1$ lar kelib chiqadi. Bularni yechamiz:

a) $|x| - 2 = 1, \ |x| = 3, \ x = \pm 3;$ $b)$ $|x| - 2 = -1, \ |x| = 1, x = \pm 1$

Javob: $\pm 1; \ \pm 3; \ \pm 7$.

Umumiy o'rta ta'lim maktablari va akademik litseylar matematika kursida uchraydigan modulli tengsizliklarni quyidagi turlarga bo'lish mumkin:

1. $|f(x)| < a, a > 0$;
2. $f|x| > b;$
3. $|f(x)| > \varphi(x);$
4. $|f(x)| < \varphi(x);$
5. $|f(x)| > |\varphi(x)|$ $(\ |f(x)| < |\varphi(x)|);$
6. $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots. + |f_n(x)| > a$ $\ (\ |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots. + |f_n(x)| < a)$

Amalda modul belgisi qatnashgan shunday tenglama yoki tengsizliklar uchraydiki, ularni yuqorida keltirilgan turlarga kiritib bo‘lmaydi[3, 27-b]. Ularda asosan modulning ta’rifidan foydalaniladi. Quyida bunga misol keltiramiz:

2. $(x+1)(|x|-1)=-\frac{1}{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish: $x=0$ bol’masligi ravshan. Chunki $x=0$ bo‘lsa, $-1=-\frac{1}{2}$ ko‘rinishidagi noto‘g‘ri tenglik hosil bo‘ladi.

Agar $x>0$ bo‘lsa, u holda berilgan tenglamadan quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$(x+1)(|x|-1)=-\frac{1}{2},\ \ x^2-1=-\frac{1}{2},\ \ x^2=\frac{1}{2},\ \ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Bulardan $x>0$ shartni $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ qanoatlantiradi.

Agar $x<0$ bo‘lsa, u holda berilgan tenglamadan quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$(x+1)(-x-1)=-\frac{1}{2},\qquad -(x+1)(x+1)=-\frac{1}{2},\qquad (x+1)^2=\frac{1}{2},$$

$$x+1=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x=-1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bularning har ikkalasi $x<0$ shartni qanoatlantiradi.

Javob: $\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ -1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ -1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. $\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|=x^2-4x+a$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama modul belgisi va parameter qatnashgan tenglamadir. Bu tenglama $x^2-\frac{3}{2}x-1\geq 0$ shartda, ya’ni $x^2\leq-\frac{1}{2}$ $va\ x\geq 2$ bo‘lganda $x^2-\frac{3}{2}x-1=-x^2-4x+a$ yoki $4x^2+5x-2a-2=0$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu parameter qatnashgan kvadrat tenglamadir. Uni yechamiz.

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+32a+32}}{8}=\frac{-5\pm\sqrt{32a+57}}{8};$$

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8},\ x_2=\frac{-5-\sqrt{32a+57}}{8}\ .$$

Bu ildizlar haqiqiy sonlar bo‘lishi uchun $32a+57\geq 0, ya'ni$ $a\geq-\frac{57}{32}$ bo‘lishi kerak. Agar $a=-\frac{57}{32}$ bo‘lsa, u holda $x_1=x_2=-\frac{5}{8}<-\frac{1}{2}$ bo‘ladi va bu holda u yechim bo‘ladi. Endi $x\leq-\frac{1}{2}$ shartda $\frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8}\leq\frac{1}{2}$ tengsizlikni yechamiz.

$$\frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8}\leq\frac{1}{2},\ -5+\sqrt{32a+57}\leq-4,\ \sqrt{32a+57}\leq 1,\ 32a\leq-56,$$

$$a\leq-\frac{56}{32}=-\frac{7}{4}.\ \text{Demak, } -\frac{57}{32}\leq a\leq-\frac{7}{4}.$$

Endi $x \geq 2$ shartni e'tiborga olsak, $\frac{-5+\sqrt{32a+57}}{8} \geq 2$ dan $a \geq 12$ ni topamiz. Agar $x_2 = \frac{-5-\sqrt{32a+57}}{8} < -\frac{1}{2}$ ni e'tiborga olsak, $a \geq -\frac{57}{32}$.

Agar $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 < 0, ya'ni -\frac{1}{2} < x < 2$ bo'lsa, u holda

$-\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) = -x^2 - 4x + a$ bo'lib, bundan $x = \frac{2(a-1)}{11}$ ni topamiz.

Bu yechim bo'lishi uchun u quyidagi $-\frac{1}{2} < \frac{2(a-1)}{11} < 2$ shartni qanoatlantirishi kerak. Bu qo'sh tengsizlikdan $-\frac{7}{4} < a < 12$ ga ega bo'lamiz.

Javob: $a < -\frac{57}{32}$ da tenglama yechimga ega emas; agar $a = -\frac{57}{32}$ bo'lsa, tenglama $x = -\frac{5}{8}$ ga teng yagona yechimga ega, agar $-\frac{57}{32} \leq a \leq -\frac{7}{4}$ yoki

$a \geq 12$ bo'lsa, u holda tenglama $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{32a+57}}{8}$ ildizlarga ega, agar

$-\frac{7}{4} < a < 12$ bo'lsa, tenglama $x = \frac{2(a-1)}{11}$ ga teng yagona yechimga ega.

5. $|4(x^3 - 2x + 1)(sinx + 2cosx)| \geq 9|x^3 - 2x + 1|$ tengsizlik yechilsin.

Yechish: 1) Aytaylik $x^3 - 2x + 1 \neq 0$ bo'lsin. U holda,

$|x^3 - 2x + 1| \cdot |sinx + 2cosx| \geq 9|x^3 - 2x + 1|, \ |sinx + 2cosx| \geq \frac{9}{4}$.

Endi $|asinx + bcosx| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ ni e'tiborga olsak,$|sinx + 2cosx| \leq \sqrt{5}$.

$\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ bo'lganligi uchun $|sinx + 2cosx| \geq \frac{9}{4}$ va $|sinx + 2cosx| \leq \sqrt{5}$

tengsizliklar birgalikda emas. Demak, bu holda tenglama yechimga ega bo'lmaydi.

2) $x^3 - 2x + 1 = 0$ bo'lsin. Bundan $x^3 - x - x + 1$=0, $x(x^2 - 1) - (x - 1) = 0$,

$x(x-1)(x+1) - (x-1) = 0, \ (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$. Bu tenglama

$x - 1 = 0 \ va \ x^2 + x - 1 = 0$ tenglamalarga teng kuchli. Ularni yechamiz.

1) $x - 1 = 0, \ x_1 = 1$; 2) $x^2 + x - 1 = 0, x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \ x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Javob: $x_1 = 1, \ x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \ x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

6. $\begin{cases} y + |x| = 2 \\ y - (x-1) = 1 \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish: Agar $x < 0$ bo'lsa, u holda berilgan Sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y + x - 1 = 1 \end{cases}; \ \begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 2 \end{cases}; y = 2, x = 0$$

Ammo bu $x < 0$ shartga ziddir. Demak, bu holda sistema yechimga ega emas.

Agar $0 \leq x \leq 1$ bo‘lsa, u holda berilgan sistema quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} y + x = 2 \\ y + x - 1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} y + x = 2 \\ y + x = 2 \end{cases}$$

Bu holda $0 \leq x \leq 1$ va $y = 2 - x$ shartni qanoatlantiruvchi barcha juftliklar yechim bo‘ladi.

Agar $x > 1$ bo‘lsa, u holda berilgan sistema quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{cases} y + x = 2 \\ y - x + 1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} y + x = 2 \\ y - x = 0 \end{cases}; \; x = 1, y = 1.$$

Ammo, bu $x > 1$ shartga ziddir. Demak, bu holda yechim yo‘q.

Shunday qilib biz, ushbu maqolada modul belgisi qatnashgan nostandart shakldagi tenglama va tengsizliklarga misollar keltirdik. Bunday tenglama va tengsizliklarga o‘xshash misollarni barcha turdagi tenglama va tengsizliklarni o‘rganish jarayonida ko‘rish mumkin. Dars jarayonini bunday tashkil qilish matematik ta’limni samarali bo‘lishini ta’minlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI: (REFERENCES)

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-sonli “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi Qarori. https://lex.uz/docs/-4409503

2. O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M.Mirziyoyevning Oliy majlisga murojaatnomasi. Yangi O‘zbekiston gazetasi. 2020 yil 25 yanvar 1-son.

3. И.И.Гайдуков. Абсолютная величина. М.: Просвешение, 1968.-96с.