SHUR TEOREMASI VA UNING OLIMPIADA MASALALARIGA TATBIQI

Maxmudov Farrux
O‘zMU Matematika fakulteti talabasi, xalqaro olimpiadalar g‘olibi
E-mail: farrukh.uzbekistan@gmail.com

Norboyev Jahongir
O‘zMU Matematika fakulteti talabasi, xalqaro olimpiadalar g‘olibi
E-mail: jakhongir_math@mail.ru

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada ko‘phadlar nazariyasida muhim hisoblangan Shur teoremasi va olimpiada masalalariga tatbiqi keltirilgan. Nufuzli olimpiada maasalalari va ularning yechimlari batafsil tushuntirilgan. Mustaqil yechish uchun yetarlicha masalalar berilgan.

Kalit so‘zlar: ko‘phad, tub son, progressiya, ketma-ketlik, koeffitsiyent.

Dastlab maqola mazmuni hisoblangan Shur teoremasi va uning isbotini keltiramiz.

Teorema 1. (Shur) [1] f o‘zgarmas bo‘lmagan butun koeffitsientli ko‘phad berilgan bo‘lsin. U holda cheksiz ko‘p tub sonlar uchun, shu tub songa bo‘linadigan va 0 ga teng bo‘lmagan $f(0), f(1), f(2), f(3)\ldots$ ketma-ketlikning kamida bitta hadi mavjud.

Isbot: Aytaylik

$f(\mathrm{x}) = \mathrm{a}_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bunda $a_n \neq 0$ va $n \geq 1$

1-hol. $f(0) = 0$ bo‘lsin.

U holda ixtiyoriy p-tub son uchun $p | f(p)$ va $\exists M \in N$, $\forall p \geq M : f(\mathrm{p}) \neq 0$

Chunki n-darajali butun koeffitsientli ko‘phad ko‘pi bilan n ta butun sonda 0 qiymat qabul qilishi mumkin.

2-hol. $f(0) \neq 0$ bo‘lsin.

Bu holda tezkarisni faraz qilaylik , ya’ni $f(0), f(1), f(2), f(3)\ldots$ ketma-ketlikning ixtiyoriy hadining tub bo‘luvchisi $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ lardan biri bo‘lsin.

$P = a_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ va $\forall m \in N$ uchun $Q_m = f(P^m)$ deylik.

$f(\mathrm{x})$ ko‘phad chekli sondagi x lar uchun +1 yoki −1 qiymat qabul qiladi.

Demak yetarlicha katta m dan boshlab $|Q_m|>1$ va $f(P^m)=Q_m=a_0(K+1)$ bunda K butun son va P ning tanlanishiga koʻra $p_1, p_2, p_3, ..., p_r$ tub sonlarning har biriga boʻlinadi.

Demak $K+1$ bu tub sonlarning barchasi bilan oʻzaro tub ya'ni uning bu tub sonlardan boshqa tub boʻluvchisi mavjud. Bundan $f(P^m)$ ning bu tub sonlardan boshqa tub boʻluvchisi mavjud.

Bu esa ziddiyatga olib keladi. Demak farazimiz xato. ■

Endi ushbu teorema yordamida yechiladigan masalalarni koʻramiz.

1-Masala. **(Eron 2004)** Barcha $f(x)$ butun koeffitsientli koʻphadlarni toping, bunda ixtiyoriy m va n oʻzaro tub natural sonlar uchun $f(m)$ va $f(n)$ sonlari ham oʻzaro tub boʻlsin.

Yechim. Koʻrish qiyin emaski $f(x)=\pm x^k, k\geq 0$ masala shartini qanoatlantiradi.

Endi biz bu holdan boshqa yechim yoʻqligini isbotlaymiz.

Aytaylik $f(x)=x^k g(x), k\geq 0$ va $g(0)\neq 0$ boʻlsin.

Agar $g(x)$ oʻzgarmas koʻphad boʻlsa uni ± 1 ga tengligini koʻrish qiyin emas.

Faraz qilaylik $g(x)$ oʻzgarmas koʻphad boʻlmasin.

U holda Shur teoremasiga koʻra cheksiz koʻp p tub sonlar uchun

$\exists n_p \in N$, $p|g(n_p)$ va $(p, n_p)=1$ boʻladi chunki $g(0)\neq 0$.

Demak $(p,n_p)=1 \Rightarrow (n_p, n_p+p)=1$ va masala shartiga koʻra $(f(n_p), f(n_p+p))=1$ ammo $p|f(n_p)$ va $p|f(n_p+p)$ bu esa ziddiyat. Demak $f(x)=\pm x^k, k\geq 0$. ■

2-Masala. Dastlabki hadi 1 ga va ayirmasi 4 ga teng arifmetik proressiyaning cheksiz koʻp hadi tub son ekanligini koʻrsating.

Yechim. Ushbu masala Direxle teoremasining xususiy holi. [2]

$P(x)=x^2+1$ koʻphad uchun Shur teoremasiga koʻra cheksiz koʻp tub son n^2+1 koʻrinishidagi sonning boʻluvchisi boʻladi. Bu masalani yechishda quyidagi lemmadan foydalanamiz.

Lemma. [3] n^2+1 koʻrinishidagi sonning ixtiyoriy tub boʻluvchisi 2 ga teng yoki $4k+1$ koʻrinishida boʻladi.

Lemmaning isboti. Aytaylik berilgan n natural soni uchun n^2+1 sonining biror toq tub boʻluvchisi p boʻlsin. U holda, $n^2\equiv -1 (\mathrm{mod}\ p) \Rightarrow n^{p-1}\equiv (-1)^{p-1} (\mathrm{mod}\ p)$.

Shuningdek $(n,p)=1$ boʻlganligi uchun Fermaning kichik teoremasiga [4] koʻra $n^{p-1}\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. Demak $(-1)^{p-1}=1 \Rightarrow 4|p-1$. Lemma isbotlandi.

Demak cheksiz koʻp tub sonlar n^2+1 koʻrinishidagi sonlarning boʻluvchisi boʻladi va

bu tub sonlarning har biri $4k+1$ koʻrinishida boʻladi.

3-Masala. (Imo Shortlist 2012 N5) Aytaylik $rad(0)=rad(1)=1$ va $\forall n\geq 2$ uchun $rad(n)$- n ning barcha turli tub bo‘luvchilari ko‘paytmasi bo‘lsin. U holda barcha koeffitsientlari nomanfiy butun son bo‘lgan $f(\mathrm{x})$ ko‘phadlarni toping. Bunda ixtiyoriy nomanfiy butun n soni uchun $rad(f(n))\big|rad(f(\mathrm{n}^{rad(n)}))$ o‘rinli bo‘lsin.

Yechim. Yechimni bir nechta qadamlarga bo‘lgan holda bajaramiz.

1-qadam. Avvalo $rad(f(n))\big|rad(f(\mathrm{n}^{rad(n)}))$ (1) ga ko‘ra

(1) :

$n\to n^{rad(n)}\Rightarrow rad(f(n))\,|\,rad(f(n^{rad(n)}))\,|\,rad(f(n^{rad(n)\cdot\, rad(n^{rad(n)})}))\;=rad(f(n^{rad(n)^2}))$ Xuddi shunday

(1) : $n\to n^{rad(n)^2}\Rightarrow rad(f(n))\,|\,rad(f(n^{rad(n)}))\,|\,rad(f(n^{rad(n)^2\cdot\, rad(n^{rad(n)^2})}))\;=rad(f(n^{rad(n)^3}))$

Induksiya metodiga ko‘ra ixtiyoriy k natural son uchun,

$rad(f(n^{rad(n)}))\,|\,rad(f(n^{rad(n)^k}))$ o‘rinli bo‘ladi.

2-qadam. Agar $f(x)\;=const$ - o‘zgarmas ko‘phad bo‘lsa masala shartini qanoatlantiradi.

Faraz qilaylik $f(x)$ o‘zgarmas ko‘phad bo‘lmasin ya’ni $deg(f(x))\geq 1$ bo‘lsin.

U holda Shur teoremasiga ko‘ra cheksiz ko‘p $p\in P$ tub sonlar uchun

$\exists n_p\in N,\; p\,|\,f(n_p)$ bo‘ladi.

Agar qaysidir p tub son uchun $(p,\,n_p)=1$ bo‘lsa, u holda $\exists k\in N:(p-1)\,|\,n=n_p+pk$, ya’ni $\exists n\in N(p-1)\,|\,n$ va $f(n)\;=f(np+pk)\equiv f(np)\equiv 0\;(modp)$ bo‘ladi.

Demak biz yetarlicha katta qilib t natural sonni tanlay olamizki, $(p-1)\,|\,rad(n)^t$ bo‘ladi. Bundan

$n^{rad(n)^t}\equiv 1(mod\;p)\Rightarrow f(n^{rad(n)^t})\equiv f(1)(mod\;p))$ va

$p\,|\,f(n)\Rightarrow p\,|\,rad(f(n))\Rightarrow p\,|\,rad(f(n^{rad(n)^t}))\Rightarrow p\,|\,f(1)$

hamda shartga ko‘ra $f(1)\neq 0$. Bu esa ziddiyat.

Demak $p\geq|\,f(1)\,|$ tub son uchun agar $\exists n_p\in N,\;p\,|\,f(n_p)$ bo‘lsa u holda $p\,|\,n_p$ bo‘ladi.

Aytaylik $f(x)\;=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0,\quad a_m\neq 0,\quad a_i\in N_0,\quad \forall i\in\{1,2,\;...\;,m\}$ bo‘lsin.

Demak cheksiz ko‘p p tub son uchun $p\,|\,a_0$, shuningdek

$a_0=0\Rightarrow f(x)=x(a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+...+\;a_1x+a0).$

Umuman olganda $f(x)\;=x^K g(x)$, $K\geq 1$ va $g(0)\neq 0$ bo‘lsin.

Aytaylik $g(\mathrm{x})$ o‘zgarmas bo‘lmagan ko‘phad bo‘lsin. U holda yana Shur teoremasiga ko‘ra cheksiz ko‘p p tub son uchun

$\exists n_p\in N,\;p\,|\,g(n_p)\,|\,f(n_p)\Rightarrow p\,|\,n_p\Rightarrow g(0)=0.$

Demak $g(x) = const$ ya'ni o'zgarmas ko'phad $\Rightarrow f(x) = cx^m$

Javob: $f(x) = cx^m$, $m \in N_0$.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

4-Masala. Dastlabki hadi 1 ga va ayirmasi 6 ga teng arifmetik proressiyaning cheksiz ko'p hadi tub son ekanligini ko'rsating.

5-Masala. (Taivan TST 2014) k natural son berilgan. Barcha $f(x)$ butun koeffitsientli ko'phadlarni toping , bunda ixtiyoriy n natural soni uchun $f(n) | (n!)^k$ bo'lsin.

6-Masala. (Sankt Petersburg 2001) Cheksiz ko'p n natural sonlari uchun n^2+1 sonining eng katta tub bo'luvchisi $2n$ sonidan katta bo'lishini isbotlang.

7-Masala. (IMO 2008) Cheksiz ko'p n natural sonlari uchun n^2+1 sonining eng katta tub bo'luvchisi $2n+\sqrt{2n}$ sonidan katta bo'lishini isbotlang.

8-Masala. k va n natural sonlar berilgan. Agar $f(x)$ o'zgarmas bo'lmagan butun koeffitsientli ko'phad bo'lsa,

$f(a),\ f(a+1),\ ...,\ f(a+n-1)$

sonlarining har biri kamida k ta turli tub bo'luvchiga ega bo'ladigan $a \in N$ soni topilishini isbotlang.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI: (REFERENCES)

1. Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu and Oleg Mushkarov. Number Theory: Concepts and Problems. XYZ press, 2017.

2. Andreescu Titu and D. Andrica. Number Theory: Structures, Examples and Problems. Boston, MA: Birkhuser, 2009.

3. Masum Billal , Amir Parvardi. Topics in Number Theory: an Olympiad-Oriented Approach 2018

4. E. Landau, Elementary Number Theory, Chelsea (New York), 1958.