SONLI INTEGRALLASH UCHUN ENG SODDA KVADRATUR FORMULALAR VA ULARNI BAHOLASHNING DASTURIY TA’MINOTINI YARATISH

Quvvatov Behruz Ulug‘bek o‘g‘li
Osiyo Xalqaro Universiteti
“Umumtexnik fanlar” kafedrasi o‘qituvchisi
E-mail: ulughbekovich.bekhruz@mail.ru

ANNOTATSIYA

Tuzilgan dastur va natijalardan aniq integrallarni turli hayotiy masalalarga tadbiqlarida, muhandislik masalalarida olinadigan differensial tenglamalar yoki integral tenglamalarda qo‘llash mumkin. Shuningdek tuzilgan dasturiy ta’minot va sonli integrallash usullari uchun to‘plangan ma’lumotlar hisoblash matematikasi, sonli usullar fanlarida nazariy va amaliy mashg‘ulotlarni o‘qitishda foydalanish mumkin.

Kalit so‘zlar: Integral, trapetsiya formulasi, Nyuton – Kotes formulalari, umumlashgan trapetsiya formulasi, rekursiv trapetsiya qoidasi.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi: Aniq integrallarni yuqori aniqlikda hisoblovchi taqribiy metodlarni tanlash va ularning dasturlaridan turli sohalarda foydalanish mumkin.

ABSTRACT

Exact integrals from the compiled program and results can be applied to various life problems, differential equations or integral equations obtained in engineering problems. Also, the data collected for the structured software and numerical integration methods can be used in the teaching of theoretical and practical training in the sciences of computational mathematics and numerical methods.

Implementation rate and cost-effectiveness: It is possible to choose approximate methods that calculate exact integrals with high accuracy and use their programs in various fields.

KIRISH

Yangi O‘zbekistonimizda yuz berayotgan madaniy, siyosiy, iqtisodiy, ilmiy – texnikaviy o‘zgarishlar Oliy ta’lim tizimida ham o‘z aksini topmoqda. Respublikamizda uzluksiz ta’lim – tarbiya tizimini yaratish, shu asosida ta’lim sifatini jahon andozalari darajasiga yetkazish ta’lim sistemasining eng muhim vazifasiga aylandi. Bu esa barcha mutaxassisliklar qatori kompyuter texnologiyalari bo‘yicha kadrlar tayyorlash sifatini oshirishni ham taqazo etadi.

Hisoblash matematikasi sohasida nazariy izlanishlar asosan, tipik matematik masalalarni yechishning sonli metodlar atrofida guruhlanadi. Bu sohaning klassik masalalaridan biri bu integrallarni taqribiy hisoblash formulalarini qurishdan iborat.

ENG SODDA KVADRATUR FORMULALAR

1.1. Nyuton – Kotes Formulalari

$f(x)$ funksiya berilgan, $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash masalasi qo‘yilgan bo‘lsin. Sonli integrallash, shuningdek, kvadratura sifatida ham tanilgan usul, sonli differensiallashga qaraganda ancha aniqroq jarayon hisoblanadi. Kvadratur

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1.1}$$

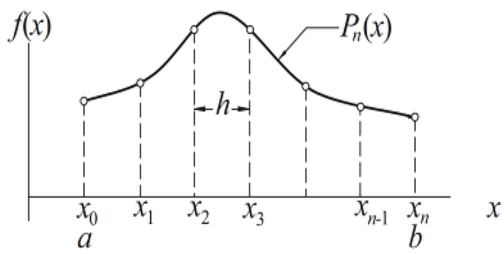
aniq integralni

$$I = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{1.2}$$

yig‘indi bo‘yicha yaqinlashtiradi, bu yerda x_i tugun absissalari va A_i vaznlar kvadratur uchun ishlatiladigan maxsus qoidaga bog‘liq. Kvadraturaning barcha qoidalari integrallashning ko‘phadli interpolyatsiyasidan kelib chiqadi. Shuning uchun, agar $f(x)$ ko‘phad bilan yaqinlashsa, ular eng yaxshi ishlaydi. Sonli integrallash usullarini ikki guruhga bo‘lish mumkin: Nyuton – Kotes formulalari va Gauss kvadraturasi. Nyuton – Kotes formulalari teng masofada joylashgan absissalar bilan tavsilanadi va trapetsiyalar qoidasi va Simpson qoidasi kabi taniqli usullarni o‘z ichiga oladi. Agar $f(x)$ allaqachon teng oraliqlarda hisoblangan bo‘lsa yoki tejamli hisoblanishi mumkin bo‘lsa, ular eng foydali hisoblanadi. Nyuton – Kotes formulalari lokal interpolyatsiyaga asoslanganligi sababli, ular polinomga faqat bo‘lakli yaqinlashishni talab qiladi. Gauss kvadraturasida absissalarning joylashuvi eng yaxshi aniqlikni olish uchun tanlanadi. Gauss kvadraturasi ma’lum bir aniqlik darajasi uchun integralni kamroq hisoblashni talab qilganligi sababli, u $f(x)$ ni hisoblash murakkab bo‘lgan hollarda qulay hisoblanadi. Gauss kvadraturasining yana bir afzalligi – bu integrallab bo‘lmaydigan singulyarliklarni boshqarish imkonini beradi, bu bizga quyidagi kabi ifodalarni hisoblash mumkin.

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad (1.3)$$

Bunda $g(x)$ funksiya korrekt funksiya bo‘lishi shart.



1.1 rasm: $f(x)$ ning ko‘phadli yaqinlashishi.

Aniq integralni ko‘rib chiqamiz

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1.4)$$

(a,b) integral diapazonini 1.1 rasmda ko‘rsatilganidek $h=(b-a)/n$ uzunlikdagi n ta teng intervallarga ajratamiz va olingan tugunlarning abssissalarini $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilan belgilaymiz. Keyin $f(x)$ ni barcha tugunlardan o‘tuvchi n – darajali polinomga yaqinlashtiramiz. Ushbu polinomning Lagranj shakli,

$$P(x) = f(x_0)\cdot l_0x + f(x_1)\cdot l_1x + f(x_2)\cdot l_2x + \ldots + f(x_n)\cdot l_nx =$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot l_i(x) \qquad (1.5)$$

tenglama, bu

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot l_i(x) \qquad (1.6)$$

bu yerda

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \qquad (1.7)$$

tenglamada aniqlangan asosiy funksiyalardir. Shuning uchun (1.4) tenglamada integralga yaqinlashish bu

$$I=\int_a^b P_n(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i)\int_a^b l_i(x)dx\right]=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i) \qquad (1.8\ a)$$

bu yerda

$$A_i=\int_a^b l_i(x)dx,\ \mathrm{i}=0,1,\ldots,\mathrm{n} \qquad (1.8\ b)$$

(1.4) va (1.8) tengliklar bu Nyuton – kotes formulalaridir. Ushbu formulalarning klassik misollariga $n=1$ bo‘lganda trapetsiyalar qoidasi; $n=2$ bo‘lganda Simpson qoidasi va $n=3$ bo‘lganda Simpson 3/8 qoidasini keltirishimiz mumkin. Bu formulalarning eng muhimi trapetsiya qoidasidir. Uni Richardson ekstrapolyatsiyasi bilan Romberg integrallashi deb nomlanuvchi samarali algoritmga birlashtirish mumkin, bu esa boshqa klassik qoidalardan samaraliroq bo‘ladi.

1.1.1. Trapetsiya formulasi

Agar $n=1$ (bitta panel), 1.2 – rasmda ko‘rsatilganidek, bizda

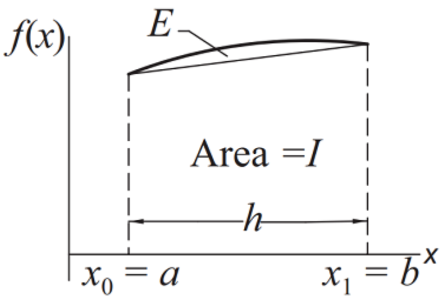
$$\ell_0=(x-x_1)/(x_0-x_1)=-(x-b)/h \qquad (1.9)$$

bor bo‘lsin. Shuning uchun,

$$A_0=\frac{1}{h}\int_a^b(x-b)dx=\frac{1}{2h}(b-a)^2=\frac{h}{2} \qquad (1.10)$$

Shuningdek $\ell_1=(x-x_0)/(x_1-x_0)=(x-a)/h$, demak

$$A_1=\frac{1}{h}\int_a^b(x-a)dx=\frac{1}{2h}(b-a)^2=\frac{h}{2} \qquad (1.11)$$



1.2 – **rasm:** Trapetsiyalar qoidasi.

(1.8 a) tenglik trapetsiyalar qoidasi sifatida tanilgan quyidagi ifodani beradi

$$I=[f(a)+f(b)]\cdot\frac{h}{2} \tag{1.12}$$

U 1.2 – rasmdagi trapetsiya yuzasini ifodalaydi. Trapesiya qoidasidagi xatolik

$$E=\int_a^b f(x)dx-I \tag{1.13}$$

1.2 – rasmda ko‘rsatilganidek, $f(x)$ va to‘g‘ri chiziqli interpolant oralig‘idagi sohaning yuzasi. Uni

$$f(x)=P(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{1.14}$$

tenglamada interpolyatsiya xatoligini integrallash orqali olish mumkin:

$$E=\frac{1}{2!}\int_a^b(x-x_0)\cdot(x-x_1)f''(\xi)dx=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b(x-a)\cdot(x-b)dx \tag{1.15}$$

$$=-\frac{1}{12}(b-a)^3f''(\xi)=-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

Umumlashgan trapetsiyalar qoidasi.

Amalda trapetsiyalar qoidasi bo‘laklarga bo‘lingan holda qo‘llaniladi. 1.3 – rasmda (a,b) soha har birining kengligi h bo‘lgan, n panellarga bo‘lingan. Integrallanadigan $f(x)$ funksiyasi har bir paneldagi to‘g‘ri chiziq bilan yaqinlashadi. Trapetsiya qoidasidan biz odatdagi I – panelning taqribiy yuzasini olamiz.

$$I_i=[f(x_i)+f(x_{i+1})]\cdot\frac{h}{2} \tag{1.16}$$

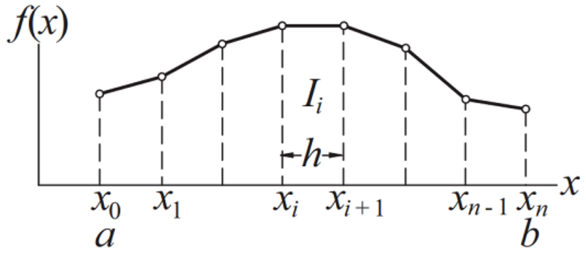
Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1.17}$$

ifodalaydigan umumiy yuza bu

$$I=\sum_{i=0}^{n-}I_i=[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+\ldots+$$
$$+2f(x_{n-1})+2f(x_n)]\frac{h}{2} \tag{1.18}$$

bu umumlashgan trapetsiyalar qoidasidir.



1.3 – **rasm:** Umumlashgan Trapetsiyalar qoidasi.

Panel yuzasidagi kesish xatoligi (1.15) tenglamada keltirilgan.

$$E_i = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$$

bu yerda $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Demak, (1.18) tenglamadagi kesish xatoligi quyidagiga teng bo‘ladi.

$$E = \sum_{i=0}^{n-1} E_i - \frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \quad (1.19)$$

Ammo

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = n\bar{f}'' \quad (1.20)$$

bu yerda $\bar{f}''$ bu ikkinchi tartibli hosilalarning o‘rtacha arifmetigi. Agar $f''(x)$ uzluksiz bo‘lsa, (a,b) da $f''(\xi) = \bar{f}''$ bo‘ladigan ξ nuqta bo‘lishi kerak. Bu esa quyidagini yozishimizga imkon beradi.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = nf''(\xi) = \frac{b-a}{h} f''(\xi) \quad (1.21)$$

Shunday qilib, (1.19) tenglamadan

$$E = \frac{-(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \quad (1.22)$$

kelib chiqadi.

(1.22) tenglamadan $E = ch^2$ (bunda c doimiy) degan xulosaga kelish noto‘g‘ri bo‘ladi, chunki $f''(\xi)$ h dan butunlay mustaqil emas. Xatolik[1] ni chuqurroq tahlil qilish shuni ko‘rsatadiki, agar $f(x)$ va uning hosilalari (a,b) da cheklangan bo‘lsa, u holda

$$E = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \ldots \quad (1.23)$$

ifodga ega bo‘lamiz.

Rekursiv trapetsiyalar qoidasi asosida olingan natijalar:

2^{k-1} panellari yordamida umumlashgan trapetsiya qoidasi bilan hisoblangan I_k integral berilgan bo‘lsin. Agar k bittaga ortadigan bo‘lsa, panellar soni ikki barobar ortadi.

$$H = b - a \qquad (1.24)$$

belgilanishdan foydalanib (1.18) tenglamada $k = 1$; 2 va 3 uchun quyidagi natijalarni topamiz.

$k = 1$ (bitta panel):

$$I_1 = [f(a) + f(b)]\frac{H}{2} \qquad (1.25)$$

$k = 2$ (ikkita panellar):

$$I_2 = \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{H}{2}\right) + f(b)\right]\frac{H}{4} = \frac{1}{2}I_1 + f\left(a + \frac{H}{2}\right)\frac{H}{2} \qquad (1.26)$$

$k = 3$ (uchta panellar):

$$I_3 = \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{H}{4}\right) + 2f\left(a + \frac{H}{2}\right) + 2f\left(a + \frac{3H}{2}\right) + f(b)\right]\frac{H}{8} =$$
$$= \frac{1}{2}I_2 + \left[f\left(a + \frac{H}{4}\right) + f\left(a + \frac{3H}{4}\right)\right]\frac{H}{4} \qquad (1.27)$$

Endi biz ixtiyoriy $k > 1$ son uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$I_k = \frac{1}{2}I_{k-1} + \frac{H}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left[a + \frac{(2i-1)H}{2^{k-1}}\right], \; k = 2,3,\ldots \qquad (1.28\text{ a})$$

bu rekursiv trapetsiya qoidasidir. Yig‘indida panellar sonini ikki baravar ortirganimizda yangi tugun nuqtalar hosil bo‘ladi. Demak (1.25) va (1.28) tenglamalardan $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_k$ ketma – ketligini hisoblashda to‘g‘ridan – to‘g‘ri tenglamadan I_k ni hisoblaymiz. Rekursiv trapetsiya qoidasidan foydalanishning afzalligi shundaki, u konvergentsiyani kuzatish va I_{k-1} va I_k o‘rtasidagi farq yetarlicha kichik bo‘lganda jarayonni tugatish imkonini beradi. (1.28 a) tenglamaning eslab qolish osonroq bo‘lgan shakli

$$I(h) = \frac{1}{2}I(2h) + h\sum f(x_{new}) \qquad (1.28\text{ b})$$

bo‘lib, bu yerda $h = H/n$ har bir panelni yaratadi.

- **Trapetsiya usulida integralni hisoblaymiz**

Trapetsiya funksiyasi (1.25) va (1.28) tenglamalar yordamida I_{k-1} (Iold) berilgan I_k (Inew) ni hisoblaydi. Istalgan aniqlikka erishilgunga qadar trapesiyani $k = 1,2,\ldots$ bilan chaqirib, $\int_a^b f(x)dx$ ni hisoblashimiz mumkin.

Trapetsiya moduli

‘‘‘ Inew = trapesiya (f,a,b, Iold,k).

Rekursiv trapetsiya qoidasi:

eski = f(x) ning x = a dan b gacha bo‘lgan integrali bilan hisoblangan

2ˆ(k –1) panelli trapetsiya qoidasi.

Inew = 2ˆk panellar bilan hisoblangan bir xil integral.

def trapezoid(f, a, b, Iold, k):
if k == 1:Inew = (f(a) + f(b))*(b – a)/2.0
else:
n = 2**(k –2)
h = (b – a)/n
x = a + h/2.0
	sum = 0.0
	for i in range(n):
	sum = sum + f(x)
	x=x+h
	Inew = (Iold + h*sum)/2.0
	return Inew

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI: (REFERENCES)

1. “NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS” © Zhilin Li, Zhonghua Qiao, and Tao Tang 2018

2. Бабушка И. Оптимальные формулы квадратур// Доклады Академии наук СССР. Том 149. № 2. –С. 227-229. 1963.

3. Боянов Б. Оптимальные квадратурные формулы // Успехи математических наук. –Москва, 2005. -Т.60, вып. 6 (366). –С. 33-52.

4. Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы// Успехи математических наук. –Москва, 1981. – Т. 36. - Вып. 4(220). – С. 107-159.