RIKKATI TENGLAMALARI VA ULARNING TATBIQLARI

Aytjanova G.T.

ABSTRACT

In this article Riccati equations are considered. Some statements on the equations are given.

АННОТАЦИЯ

В статъе рассматриваются уравнение Риккати. Приводятся некоторые утверждения об этих уравнениях.

Quyida Rikkati tenglamalari to‘g‘risida ba’zi mulohazalarni keltiramiz.

Ushbu, $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, $a(x) \neq 0, c(x) \neq 0$ (1) ko‘rinishdagi differensial tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi; bu yerda $a(x), b(x), c(x) \in C(I;R)$ – berilgan funksiyalar (I - biror sonli oraliq), $y = y(x)$-noma’lum funksiya.

Rikkati tenglamalari optimal boshqaruvni sintezlash, variatsion hisob, differensial tenglamalar yechimlarini tekshirish masalalarida ko‘p uchraydi [2-5].

Ma’lumki [2], (1) tenglama yechimi ba’zi hollardagina $a(x), b(x), c(x)$ va elementar funksiyalar orqali chekli sondagi qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, funksiyalarning kompozitsiyalarini olish va integrallash amallari yordamida ifodalanadi, ya’ni kvadraturalarda yechiladi. Umumiy holda, bu tenglamaning yechimi kvadraturalarda ifodalanmaydi.

Teorema 1. Agar Rikkati tenglamasining biror xususiy yechimi ma’lum bo‘lsa, uning umumiy yechimi kvadraturalarda topiladi.

Isboti. $y = \varphi(x)$ qaralayotgan tenglamaning biror xususiy yechimi, ya’ni $\varphi'(x) = a(x)\varphi^2(x) + b(x)\varphi(x) + c(x)$ bo‘lsin. (1) tenglamada $y = \varphi(x) + z$ almashtirish bajaramiz ($z = z(x)$-yangi noma’lum funksiya) va quyidagi Bernulli tenglamasiga kelamiz:

$$z' = a(x)z^2 + (2a(x)\varphi(x) + b(x))z .$$

Bu tenglamani $z = \frac{1}{\nu}$ almashtirish yordamida chiziqli differensial tenglamaga keltiramiz, ($\nu = \nu(x)$ yangi noma’lum funksiya). Chiziqli differensial tenglamalar esa umumiy holda kvadraturalarda yechiladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Teorema 2. Rikkati tenglamasining umumiy yechimi ixtiyoriy o‘zgarmasning kasr-chiziqli funksiyasidan iborat: $y = \dfrac{cf(x) + g(x)}{cw(x) + u(x)}$.

Isboti. Yuqoridagiga o‘xshash Rikkati tenglamasining biror yechimini $j(x)$ bilan belgilab, tenglamada $y = j(x) + \dfrac{1}{n}$ almashtirishni bajarsak, $n = n(x)$ noma’lum funksiyaga nisbatan $n' + (2a(x)j(x) + b(x))n = -a(x)$ tenglama hosil bo‘ladi.

Demak, Rikkati tenglamasining ixtiyoriy yechimi $y = j(x) + \dfrac{1}{cw(x) + u(x)}$, ya’ni $y = \dfrac{cj(x)w(x) + j(x)u(x)}{cw(x) + u(x)}$ ixtiyoriy o‘zgarmasning kasr-chiziqli funksiyasi ko‘rinishida bo‘ladi. Aksincha, faraz qilaylik, $y = y(x)$ funksiya o‘zgarmas c ning kasr-chiziqli funksiyasidan iborat bo‘lsin: $y = \dfrac{cf(x) + g(x)}{cw(x) + u(x)}$ $(f, g, w, u \ O C^1)$. Bu tenglikdan o‘zgarmas c ni topaylik: $c = \dfrac{g(x) - u(x)y}{w(x)y - f(x)}$.

Oxirgi tenglikni hadma-had differensiallab, y ga nisbatan Rikkati tenglamasini hosil qilamiz. Jumla isbot bo‘ldi.

Dastlab, Rikkati tenglamasining kvadraturalarda yechiladigan quyidagi sodda hollarini qayd etaylik:

1. $y' = f(x)(ay^2 + by + c)$
2. $y' = a\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + b\dfrac{y}{x} + c$
3. $y' = ay^2 + \dfrac{b}{x}y + \dfrac{c}{x^2}$
4. $y' = a'(x)y^2 + a(x)f(x)y + f(x)$
5. $y' = a(x)(y + p(x))(y + q(x)) - h'(x)$, bunda $h(x) = p(x)$ yoki $h(x) = q(x)$
6. $xy' = f(x)y^2 + ny + ax^{2n}f(x)$
7. $xy' = x^{2n}f(x)y^2 + (ax^n f(x) - n)y + bf(x)$
8. $y' = f(x)y^2 + l y + ae^{2l x}f(x)$

Bu yerda uchraydigan funksiyalar uzluksiz deb hisoblanadi. a, b, c, n, l lar esa o‘zgarmas sonlar.

1-tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Uning o‘zgaruvchilarini ajratib, osongina integrallanadi. 2-tenglama esa bir jinsli differensial tenglama bo‘lib, $\frac{y}{x} = u$ almashtirish yordamida o‘zgaruvchilari ajratiladi. 3-tenglamada xususiy ye-chim $y = \frac{k}{x}$ ko‘rinishda izlanadi ($k = const$). 4-tenglama $y' = a'(x)y^2 + f(x)(a(x)y + 1)$ ko‘rinishga keltirilgandan so‘ng tenglamada $a(x)y + 1 = u(x)$ almashtirish bajarish lozim. 5-tenglama $(y + h(x))' = (y + p(x)) \cdot (y + q(x))$ ko‘rinishga keltirilib, $y + h(x) = u(x)$ almashtirish .yordamida Bernulli tenglamasi hosil qilinadi. 6-tenglamani $xy' - ny = f(x)(y^2 + ax^{2n})$ ko‘rinishda yozib, $m = x^{-(n+1)}$ integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida tenglamaning chap tomonini to‘la hosilaga keltiramiz va $\frac{y}{x^n} = u$ almashtirish yordamida o‘zgaruvchili ajratiladi. 7-tenglamani $xy' + ny = ((x^n y)^2 + b)f(x) + af(x)x^n y$ ko‘rinishda yozib, $m = x^{n-1}$ integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida chap tomoni to‘la hosilaga keltiriladi va $x^n y = u$ almashtirish yordamida o‘zgaruvchilari ajratiladi. 8-tenglamani $y' - ly = f(x)(y^2 + ae^{2lx})$ ko‘rinishda yozib, uni $m = e^{-lx}$ integrallovchi ko‘paytuvchiga ko‘paytirib, chap tomonini to‘la hosilaga keltirgach, $e^{-lx}y = u$ almashtirish yordamida o‘zgaruvchilari ajratiladi.

Kerakli almashtirish yordamida har qanday Rikkati tenglamasidagi noma’lum funksiya oldidagi koeffitsentni nolga aylantirish mumkin. Buning uchun (1) tenglamada $y = a(x)z + b(x)$ (2) almashtirishni bajarish lozim, bu yerda $a(x), b(x)$ noldan farqli tanlanishi kerak bo‘lgan funksiyalar, $z = z(x)$ esa yangi noma’lum funksiya. (2) ni (1) ga qo‘yib quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$z' = a(x)a(x)z^2 + (2a(x)b(x) + b(x) - \frac{a'(x)}{a(x)})z + \frac{a(x)b^2(x) + b(x)bx + c(x) - b'(x)}{a(x)}$$

Bu tenglamada $a(x) = \frac{a}{a(x)}$, $b(x) = \frac{a'(x) - a(x)b(x)}{2a(x)a(x)}$ deb tanlasak, u $z' = az^2 + r(x)$ (3) ko‘rinishga keladi.

Bu yerda $r(x) = \frac{a(x)b^2(x) + b(x)b(x) + c(x) - b'(x)}{a(x)}$. (3) tenglama **kanonik ko‘rinishdagi Rikkati tenglamasi** deyiladi.

Agar kanonik ko‘rinishdagi Rikkati tenglamasida $r(x) = bx^w$ bo‘lsa, bunday tenglama **maxsus Rikkati tenglamasi** deb ataladi. Demak, maxsus Rikkati tenglamasi ushbu $y' = ay^2 + cx^w$ ko‘rinishga ega.

Bu tenglamaning kvadraturalarda yechilishi yoki yechilmasligi to‘la o‘rganilgan. (4) tenglamada $w = 0$ bo‘lganda o‘zgaruvchilar ajraladi, $w = -2$ bo‘lganda esa $y = \frac{u}{x}$ almashtirish bajarilib, o‘zgaruvchilari ajratiladi va demak, kvadraturalarda yechiladi. (4) tenglamani kvadraturalarda yechiladigan boshqa hollarini topish maqsadida quyi dagicha ish tutaylik.

Tenglamada $y = \frac{1}{x^2 y_1} - \frac{1}{ax}$ almashtirish bajaraylik: bunda $y_1 = y_1(x_1)$, $x_1 = x^{w+3}$ $(w + 3 \neq 0)$, yangi noma’lum funksiya. U holda (4) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = a_1 y_1^2 + c_1 x_1^{w_1}, \qquad (4_1),$$

bunda $a_1 = -\frac{c}{w+3}$, $c_1 = -\frac{a}{w+3}$ va $w_1 = -\frac{w+4}{w+3}$.

Oxirgi (5) tenglikni $\frac{1}{w_1 + 2} = 1 + \frac{1}{w+2}$ (6_1) kabi yozish mumkin. Bu yerda shuni e’tirof etaylikki, almashtirish formulalari tanlash usuli yordamida topiladi. Almashtirish formulalaridan ravshanki, agar yangi (4_1) tenglama kvadraturalarda yechilsa, eski (4) tenglamaning yechimi ham kvadraturalarda ifodalanadi. (4) dan (4_1) ga o‘tish jarayonini k $(k \in N)$ marta takrorlasak, ushbu

$$\frac{dy_k}{dx_k} = a_k y_k^2 + c_k x_k^{w_k} \qquad (4_k)$$

tenglamaga kelamiz; bu yerda a_k, c_k o‘zgarmas sonlar va

$$\frac{1}{w_k+2} = k + \frac{1}{w+2} \qquad (6_k)$$

bo‘ladi.

Agar w daraja ko‘rsatkichidan boshlab yuqoridagi almashtirishlarni teskari tartibda bajarsak, $w_{-1}, w_{-2}, \dots$ daraja ko‘rsatkichli maxsus Rikkati tenglamalariga kelamiz; bunda $\dfrac{1}{w_{-k}+2} = -k + \dfrac{1}{w+2}$, $k = 1, 2, \dots$

Agar biror natural k uchun $w_k = 0$ yoki $w_{-k} = 0$ bo‘lsa, mos Rikkati tenglamasi kvadraturalarda yechiladi. Bunaqa w lar (6_k) va (6_{-k}) formulalarga ko‘ra $w = \dfrac{4k}{1-2k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ko‘rinishda bo‘lishi kerak.

Shunday qilib, (4) maxsus Rikkati tenglamasidagi daraja ko‘rsatkichi w (7) ko‘rinishda bo‘lsa, bunday tenglama kvadraturalarda yechilar ekan. Boshqa ko‘rinishdagi w lar uchun maxsus Rikkati tenglamasining yechimlari kvadraturalarda ifodalanmasligini Liuvill isbotlagan.

Ba’zi hollarda Rikkati tenglamasining yechimlari maxsus funksiyalar orqali ifodalanishi mumkin. Misol sifatida, ushbu $y' = y^2 + x^2$ (8) maxsus Rikkati tenglamasini qaraylik. Kerakli almashtirishlarni bajarib ko‘rsatish mumkinki, (8) tenglamaning umumiy yechimi Bessel funksiyalari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$y = \frac{x\left(cJ_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right) + Y_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}{cJ_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right) + Y_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$ (c -ixtiyoriy o‘zgarmas).

Bu yerda $J_n(x)$ va $Y_n(x)$ - n indeksli (tartibli) mos ravishda birinchi va ikkinchi tur Bessel funksiyalari [4]

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI: (REFERENCES)

1. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том II. - М.: Физматлит, 1974. - 262 с.

2. Егоров А. И. Уравнения Риккати. - М.: Физматлит, 2001. - 342 с.

3. Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати вариационном исчислении. - М.: Факториал, 1998. - 284 с.

4. Salohiddinov M. S., Nasriddinov G. N. Oddiy differensial tenglamalari. – Toshkent: O‘zbekiston, 1994. - 274 b.

5. Reid W. T. Riccati matrix differensial equation and nonoscillation criteria for associated linear differensial systems // Pacific J. Math. -1963 -V.13, №2. 171-177pp.