MATEMATIK ANALIZDA TEOREMA VA TASDIQLARNI ASOSLOVCHI AJOYIB FUNKSIYALAR

Aytjanova G.T.
O‘zbekiston Milliy universiteti
Email: gulaim2003qar@gmail.com

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada matematik analizdagi funksiyalarga doir bir qancha teorema, tasdiq va natijalarni asoslashda keng qo‘llaniluvchi, tuzilishi sodda, lekin ko‘pgina xossalarga ega funksiyalarni ko‘rib chiqamiz.

Kalit so‘zlar: funksiya, Dirixle funksiyasi, uzluksizlik, uzilish nuqtasi, kesma, integrallanuvchi.

AMAZING FUNCTIONS TO DESCRIBE SOME THEOREMS AND COROLLARIES IN MATHEMATICAL ANALYSIS

ABSTRACT

This article is about functions in the mathematical analysis of many theorems, which are widely used in the justification of proofs and results, have a simple structure, but we will consider functions with many properties.

Keywords: function, Dirichlet function, continuity, breakpoint, segment, integrability.

Bizga ma’lumki, matematika va boshqa yo‘nalishlarda biror fikr, tasdiq yoki teoremani isbotlashda yoki qabul qilishda mantiqdan keng foydalaniladi. Ya’ni berilgan teorema yoki tasdiqlarning to‘g‘riligini isbot qilish uchun unga teskari mulohaza qilinib, ziddiyatga olib kelinadi. Ushbu usul, teskari faraz qilish usuli (reductio ad absurdum) [1] deb ataladi. Funksiyalarga doir bir qator teoremalarni isbotlashda mantiqdan foydalangan holda, teskari faraz usulini qo‘llash jarayonida bir qancha funksiyalarning tutgan o‘rnini tahlil qilamiz:

1. Dirixle funksiyasi

Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo‘yish natijasida hosil bo‘lgan funksiya Dirixle funksiyasi deb ataladi.

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa.}\end{cases}$$

1) **Teorema.** (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya [a, b] segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, funksiya shu segmentda chegaralangan bo‘ladi [2].

Yuqoridagi teorema bo‘yicha savol tug‘iladi: Agar funksiya chegaralangan bo‘lsa, u har doim uzluksiz bo‘ladimi? Ushbu savolga javobni Dirixle funksiyasi orqali beramiz. Dirixle funksiyasining qiymatlar sohasi [0, 1] kesma, ya’ni bu funksiya chegaralangan, lekin uning tuzilishdan ko‘rishimiz mumkinki, Dirixle funksiyasi uzluksiz emas.

2) **Teorema.** Agar $f(x)$ funksiya [a, b] kesmada integrallanuvchi bo‘lsa, u holda, bu funksiya [a, b] kesmada chegaralangan bo‘ladi. [2].

Yuqoridagi teoremaning teskarisi, ya’ni [a, b] kesmada chegaralangan $f(x)$ funksiya har doim integrallanuvchi bo‘lishi mumkinmi? Dirixle funksiyasining integral yig‘indisini qaraymiz:

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} D(\varepsilon_k)\Delta x_k = \begin{cases} b-a, & \varepsilon_k \in \mathbb{Q} \\ 0, & \varepsilon_k \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

3) **Teorema.** $f(x) \in R[a,b]$ (f [a, b] kesmada integrallanuvchi) bo‘lsa,

$|f(x)| \in R[a,b]$ va $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Yuqoridagi teoremaga binoan $f(x)$ funksiya [a, b] kesmada integrallanuvchiligidan uning moduli integrallanuvchiligi kelib chiqadi. Lekin, aksinchachi? Dirixle funksiyasini quyidagicha tanlab olamiz:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

$|D(x)| = 1$ hamda bu funksiya integrallanuvchi, lekin $D(x)$ integrallanuvchi emas.

Bundan ravshanki, funksiya moduli integrallanuvchiligdan o‘zining integrallanuvchiligi kelib chiqmaydi.

Demak, Dirixle funksiyasining integral yig‘indisi chekli limitga ega emas, shu sababli, bu funksiya integrallanuvchi bo‘lmaydi. Bundan kelib chiqadiki, chegaralangan funksiyalar har doim ham integrallanuvchi bo‘lavermaydi.

Dirixle funksiyasini umuman olib qaraydigan bo‘lsak, $X = \mathbb{R}$ to‘plamda aniqlangan, ikkinchi tur uzilishga ega [3] chegaralangan funksiya, chunki uning ixtiyoriy nuqtasi uchun o‘ng va chap limit mavjud emas. Shuningdek, bu funksiya uchun ixtiyoriy ratsional son davr bo‘la oladi.

2. $y = sign(x)$ **funksiyasi**

$$sign(x)=\begin{cases}1, \text{ agar } x>0,\\ 0, \text{ agar } x=0,\\ -1, \text{ agar } x<0\end{cases}$$

Bunda sign – lotincha signum so‘zidan olingan bo‘lib, “belgi”, “ishora” degan ma’noni anglatadi [2].

1) **Teorema.** Agar $f(x)$ (a, b) intervalda uzluksiz bo‘lsa, har doim uning boshlang‘ich funksiyasi mavjud.

Ushbu teoremaning teskarisi, ya’ni (a, b) intervalda boshlang‘ish funksiyasi mavjud bo‘lgan funksiya har doim uzluksiz bo‘ladimi? $y=sign(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi mavjud:

$$F(x)=\begin{cases}-x+C_1, \text{ agar } x<0,\\ x+C_2, \text{ agar } x\geq 0.\end{cases}$$

bu yerda, C_1, C_2 - o‘zgarmas sonlar. Lekin, $y=sign(x)$ funksiya uzluksiz emas.

$y=|sign(x)|$ funksiya (0,0) nuqtada bartaraf etish mumkin bo‘lgan uzilish nuqtasiga ega funksiyaga misol bo‘ladi. $y=sign(x)$ funksiyaning o‘zi esa 1-tur uzilish nuqtali funksiyaga misol, chunki (0,0) nuqtada ushbu funksiyaning o‘ng va chap limitlari bir biriga teng emas.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI: (REFERENCES)

1. Rozvan Gelca, Titu Andrescu, Putnam and Beyond, - Springer Science+Business Media, LLC, 2007, P. 1.
2. Azlarov T., Mansurov H., Matematik analiz, - Toshkent, “O‘qituvchi”, 1994, 110-113, 151-153, 297-b.
3. Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A., Matematik analzidan ma’ruzalar, - Toshkent, “Voris-nashriyot”, 2010, 97-b.