УДК 519.63

DISKRET SPEKTRALLIQ MÁSELENIŃ SHESHIMLERINIŃ HÁLSIZ JIYNAQLILIĠI

J.P. Allanazarov
NMPI dotcenti

АННОТАЦИЯ

Jumısta aralas tuwındılı ekinshi tártipli turaqlı koefficientli elliptikalıq teńlemesi ushın spektrallıq másele tuwrı múyeshli oblastta qaralġan. Bul másele ushın óz-ózine tuyinles hám oń anıqlanġan operatorlı shekli ayırmalı sxema dúzilgen hám diskret máseleniń birinshi menshikli mánisi berilgen máseleniń birinshi menshikli mánisine jıynaqlı bolatuġını hám diskret máseleniń birinshi menshikli funkciyası berilgen máseleniń birinshi menshikli funkciyasına hálsiz jıynaqlı bolatuġinlıġı dalillep kórsetilgen.

Giltlik sózler: menshikli mánis, spektrallıq másele, shekli ayırmalı sxema, tuwtımúyeshlik, óz-ózine túyinles operator, hálsiz jıynaqlılıq.

ANNOTATSIYA

Ishda aralash hosilali doimiy koeffitsiyentli ikkinchi darajali elliptik tenglama uchun spektral muammo to‘g‘ri burchakli hududda qaralgan. Vazifa uchun o‘z-o‘zidan bog‘langan va ijobiy aniqlangan operatorli chekli ayirmali sxemasi tuzilgan va diskret vazifaning birinchi o‘ziga xos qiymati berilgan masalaning birinchi o‘ziga xos qiymatiga yaqinlashivi va diskret vazifaning birinchi o‘ziga xos funkciyasi berilgan masalaning birinchi o‘ziga xos funkciyasiga zaif yaqinlashivchanligi isbotlangan.

Kalit so‘zlar: xususiy qiymat, spektral muammo, chekli ayirmali sxema, to‘rtburchak, o‘z-o‘zidan bog‘langan operator, zaif yaqinlashivchanlik.

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрено спектральная задача для эллиптического уравнения второго порядка со смешанной производной и с постоянными коэффициентами в прямоугольной области. Для задачи построена разностная схема с самосопряженным и положительно определенным оператором и доказаны сходимость первой собственной значении дискретной задачи к первому собственному значению исходной задачи и слабая сходимость первый собственной функции дискретной функции к первому собственному функцию исходной задачи.

Ключевые слова: собственные значения, спектральная задача, разностная схема, прямоугольник, самосопряженный оператор, слабая сходимостью

ABSTRACT

The paper considers a spectral problem for a second-order elliptic equation with a mixed derivative and constant coefficients in a rectangular region. A difference scheme with a self-adjoint and positive definite operator is constructed for the problem and the convergence of the first eigenvalue of the discrete problem to the first eigenvalue of the original problem and the weak convergence of the first eigenfunction of the discrete function to the first eigenfunction of the original problem are proved.

Keywords: eigenvalues, spectral problem, difference scheme, rectangle, self-adjoint operator, weak convergence

Jumısta aralas tuwındılı ekinshi tártipli turaqlı koefficientli elliptikalıq teńlemesi ushın spektrallıq másele tuwrı múyeshli oblastta qaralǵan. Bul másele ushın óz-ózine tuyinles hám oń anıqlanǵan operatorlı shekli ayırmalı sxema dúzilgen hám diskret máseleniń birinshi menshikli mánisiniń (m.m.) berilgen máseleniń birinshi menshikli mánisine jıynaqlılıǵı hám diskretlik birinshi menshikli funkciyalarınıń (m.f.) berilgen máseleniń birinshi menshikli funkciyasına hálsiz jıynaqlı bolatuǵını dálillengen.

Ilimniń hám texnikanıń kóplegen mámeleleri, mısalı, terbelis hám ornıqlılıqqa baylanıslı máseleleri modellestiriw basqıshında elliptikalıq tiptegi operator ushın spektrallıq máselelerdi sheshiw zárúrligine alıp keledi. [1] jumısında kesindili-analitikalıq shegaralı oblastında koefficienti analatikalıq bolıwı esapqa alınıp óz-ózine túyinles ekinshi tártipli elliptikalıq operatordıń m.m. niń L_2 keńisliginde $O(h)$ jıynaqlılıq bahası alınǵan. [2] jumısında Laplas operatorı bes tochkalı shekli ayırmalı operator menen approksimaciyalanadı. Sonda shegarası shekli sandagı kesindili-analitikalıq tuyıq iymekliktiń ishki múyeshi π den úlken bolmaǵan oblastlar ushın m.m. niń L_2 keńisliginde $O(h^2)$ jıynaqlılıq bahası alınǵan. Teń ólshemli metrikada, egerde oblasttıń ishki múyeshleri π/2 den úlken bolmaǵanda m.f. nıń qateligi ushın $O(h^2 \ln h)$ bahası alınǵan.

1.1. **Máseleniń qoyılıwı.** Meyli m.m. hám m.f. tabıwǵa arnalǵan tómendegi teńlemeni qanaatlandıratuǵın máseleni qarastırayıq:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\right]d\Omega =$$

$$=\lambda \iint_{\Omega} uv d\Omega, \text{ қалеген } v\epsilon \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \ |\alpha|<1, x\epsilon\Omega, \qquad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma}=0, \qquad (1.2)$$

bunda Ω-shegarası Γ bolǵan $\{0<x_i<l_i,\ i=1,2\}$ tuwrımúyeshlik, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ –Sobolev keńisligi.

Bul másele tómendegi variaciyalıq máselesine ekvivalent boladı: sonday $u \epsilon \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ funkciyasın tabıw kerek, mına tómendegi kvadratlıq formulası

$$D[u] = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right] d\Omega$$

mına tómendegi shartinde

$$H[u] = \iint_\Omega u^2 d\Omega = 1, \qquad u|_\Gamma = 0$$

eń kishi mánisine iye bolsın.

Bul minimum eń kishi m.m. ti anıqlaydı

$\lambda_1 = \min D[u] = D[u_1]$

hám birinshi m.f. da erisiledi.

Mánisi boyınsha ekinshi m.m. hám oǵan sáykes keliwshi m.f. dál usınday (λ_1, u_1) dey mına qosımsha ortogonallıq shartin

$$\iint_\Omega u_1 \, u d\Omega = 0$$

qanaatlandırǵanda anıqlanadı.

1.2. Diskretlik másele.

Meyli tuwrımúyeshliktiń tárepleri l_i óz-ara sáykeslestirilgen bolsın. Tuyıq Ω oblastında mına túyinlerden ibarat $x=(x_1,x_2)$, $x_s= i_s h$, $i_s= 0,1,2,\dots, N_s$, $h=1/N_s$, $s=1,2$ tuwrı múyeshli torlardı kirgizemiz. Ishki túyinlerdiń kópligin $\omega=\{x, i_s=1,2,\dots,N_s-1\}$, al shegaralıq túyinlerdi $\gamma = \gamma_+^{(1)} \cup \gamma_-^{(1)} \cup \gamma_+^{(2)} \cup \gamma_-^{(2)}$, arqalı belgileyik, bunda $\gamma_+^{(s)}=\{x,\ i_s= N_s,\ i_\gamma=1,2,\dots, N_\gamma-1\}$, $\gamma_-^{(s)}=\{x,\ i_s=0,\ i_\gamma=1,2,\dots, N_\gamma\}$ belgileymiz.

Berilgen (1.1),(1.2) máseleniń diskretlik analogi sıpatında mına tómendegi máseleni qarastıramız:

$$\Delta^h y + \alpha B_1^h y + h^2 \beta B_2^h y + \lambda^h y = 0, \quad x \epsilon \omega \qquad (1.3)$$

$$y=0, \qquad x \epsilon \gamma \qquad (1.4.)$$

bunda

$\Delta^h y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$, $B_1^h y = y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{\bar{x}_2 x_1}$, $B_2^h y = y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}$, $\beta=(1+3\alpha+2\alpha^2)/6$.

ω torınıń túyinlerinde berilgen hám γ shegalıq túyinlerinde nolge aylanatuǵın torlıq funkciyalardıń Y keńisligın kirgizemiz. (1.1) máselesine sáykes keliwshi variacialıq máseleniń kvadratlıq funkcionalı tómendegı túrge iye boladı:

$$D^h y = (y_{\bar{x}_1}^2, 1)_3 + (y_{\bar{x}_2}^2, 1)_4 + 2\alpha(y_{\bar{x}_1}, y_{\bar{x}_2})_1 - h^2\beta(y_{\bar{x}_1 x_2}^2, 1)_1,$$

bunda $(,)_1 = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}$, $(,)_3 = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2-1}$, $(,)_4 = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2}$.

Variacialıq máseleniń kavadratlıq funkcionalı m.m. hám m.f. nı tómendegishe anıqlaydı: torlıq funkciyanıń Y klassinda $D^h y$ funkcionalınıń

$$H^h y = = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} y_{i,j}^2 = 1 \qquad (1.5)$$

shartin qanaatlandırǵandaǵı minimumı eń kishi m.m. ti beredi, yaǵnıy

$$\lambda_1^h = \min_{x\epsilon\omega} D^h y = D^h y_1$$

hám (1.3),(1.4) máselesiniń y_1 m.f. sında ámelge asadı

1.3. Hálsiz jıynaqlılıq.

(1.1) birdeyliginiń diskretlik analogin qarastıramız

$$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}[y_{\bar{x}_1}\eta_{\bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2}\eta_{\bar{x}_2} + \alpha(y_{\bar{x}_1}\eta_{\bar{x}_2} + y_{\bar{x}_2}\eta_{\bar{x}_1}) - h^2\beta y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\eta_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]h^2 =$$
$$=\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij}\eta_{ij}h^2, \quad \forall\, \eta \in Y \qquad (1.6)$$

Shekli ayırmalı λ_1^h m.m. niń berilgen máseleniń λ_1 m.m. ne jıynaqlılıǵın hám shekli ayırmalı y_1 m.f. nıń u_1 berilgen máseleniń birinshi menshikli funkciyasına hálsiz jıynaqlı bolatuǵının kórsetemiz. Meyli h nolge jıynaqlı bolatuǵın qandayda bir sanlı izbe-izlikti payda etsin. Biz dáslep λ_1^h shamasınıń mánisi joqarıdan h boyınsha teń ólshemli bazıbir san menen shegaralanǵanlıǵın kórsetemiz. Haqıyqatında da $\overset{0}{C}{}^2(\Omega)$ keńisliginen qandayda bir φ funkciyasın alamız hám $D^h[\varphi]$ shaması dúzemiz. Barlıq jetkilikli kishi h ushın $\varphi|_\gamma=0$ shárti orınlanǵanlıqtan, sonda

$\frac{D^h[\varphi]}{H^h[\varphi]} \geq \lambda_1^h$ boladı,

Biraqta h→0 umtılǵanda,

$$\frac{D^h[\varphi]}{H^h[\varphi]} \to \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]}.$$

Bunnan úles izbe-izliktegi barlıq λ^h m.m.leri bazıbir san menen shegaralanǵanlıǵı kelip shıǵadı. $D^h[y]$ shegaralanǵanlıǵınan hám $H^h[y]$ =1 bolǵanlıǵınan $D[\tilde{y}]$ hám $H[\tilde{y}]$ integrallarınıń shegaralanǵanlıǵı kelip shıǵadı, bundaǵı $\tilde{y}$ tómendegishe anıqlanǵan tolıqtırıwshı funkciya

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_{j+1}^{i+1} + y_{\bar{x}_1,\,{}^{i+1}_{j+1}}(x_1 - x_{1,i+1}) + y_{\bar{x}_2,\,{}^{i+1}_{j+1}}(x_2 - x_{2,j+1}), & l_{i,j} \geq 0, \\ y_{i,j} + y_{x_1 i,j}(x_1 - x_{1,i}) + y_{x_2 i,j}(x_2 - x_{2,j}), & l_{i,j} \leq 0, \end{cases}$$

bunda $l_{i,j} = x_1\text{-}x_{1,i} + x_2\text{-}x_{2,j+1}$=0.

Sonlıqtan [3, 291 b.] jumısındaǵı 3.1 teoreması boyınsha sonday h_s úles izbe-izligı ajıratıwǵa boladı, sonda $\tilde{y}_{h_s}$ hám $\frac{\partial \tilde{y}_{h_s}}{\partial x_i}$ funkciyaları $W_2^1(\Omega)$ keńisliginde sáykes $\tilde{u}$ hám $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}$ fúnkciyalarına hálsiz jıynaqlı boladı hám sonıń menen birge $H[\tilde{u}]$ =1 boladı

Diskretlik birdeylikte shekke ótpesten aldın tómendegi ańlatpanıń $\eta \in C^\infty$ ushın shegaralanǵanlıǵın kórsetemiz

$$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\eta_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\ h^2$$

Haqiyqatındada Koshi-Bunyakovskiydiń hám [4,320 b.] teńsizliklerinen paydalanıp

$(\Delta^h y, \Delta^h y) \leq \frac{3}{2(1-|\alpha|)}(Ay,Ay)_0$, (1.7)

bunda A – (1.3) teńlemesi menen anıqlanǵan operator, mınaǵan iye bolamız

$$\left(\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} y_{\bar{x}_1\bar{x}_2} h^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} \eta_{\bar{x}_1\bar{x}_2} h^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{3}{2(1-|\alpha|)}}\,\lambda^h\bar{M} = M = const,$$

bunda λ^h- (1.3),(1.4) máselesiniń m.m.

nátiyjede (1.6) diskretlik birdeyliginen $h\to 0$ umtilǵandaǵı shegine ótsek mına tómendegı birdeyligine iye bolamız:

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \alpha\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)\right] d\Omega = \lambda \iint_\Omega u\,\eta\, d\Omega. \quad (1.8)$$

(1.8) birdeyligi $\forall\eta \in \overset{0}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ ushın orınlanatuǵın bolǵanlıqtan, al $\overset{0}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ keńisligi $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ keńisligine tıǵız boladı [17,345 b.]. Sonlıqtan (1.8) birdeyligi $\forall\eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ ushın orınlanadı.

Endi $\tilde{\lambda} = \lambda_1$ hám $\tilde{u} = u_1$ ekenligin kórsetemiz. Dáslep $\tilde{\lambda} \leq \lambda_1$ ekenligin ornatamız. Meyli $\bar{u} \in \overset{0}{C}{}^{2}(\Omega)$ funkciyası ushın $\bar{u}|_\Gamma=0$ boladı hám

$\bar{\lambda} = \frac{D[\bar{u}]}{H[\bar{u}]} \geq \lambda_1 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$

hám meyli

$\bar{\lambda}^{h_s} = \frac{D^{h_s}[\bar{u}]}{H^{h_s}[\bar{u}]}$, $\quad h_s = {}^{1}/_{N_s}$.

Varyaciyalıq principke tiykarlanıp $\lambda_1^{h_s} \leq \bar{\lambda}^{h_s}$, sonıń menen birge $h_s \to 0$ da $\bar{\lambda}^{h_s} \to \bar{\lambda}$ boladı. h $\to 0$ umtılǵandaǵı shekke ótip mına teńsizligine iye bolamız

$\tilde{\lambda} \leq \bar{\lambda}_1 \leq \lambda_1 + \varepsilon$.

Bumman ε shamasınıń erikli ekenligin esapqa alıp $\tilde{\lambda} \leq \lambda_1$ teńsizligine iye bolamız. Nátiyjede, (1.8) birdeyligin itibarǵa alıp $\tilde{\lambda} = \lambda_1$, $\tilde{u} = u_1$ ekenligine isenim payda etemiz.

ÁDEBIYATLAR: (REFERENCES)

1. Vaydinger L. Ob ocenke pogreshnosti pri nahojdenii sobstvennih znacheniy metodom konechnih raznostey// Jurn. Vichisl. Matematiki I mat. Fiziki. -1965. –T.5. -5. 806-815 b.
2. Vaydinger L. O vichislenii sobstvennih znacheniy i sobstvennih funkciy operatora Laplasa metodom konechnih raznostey// Jurn. Vichisl. Matematiki I mat. Fiziki. -1966. –T.6. -4. 687-698 b.
3. Ladijenskaya O.A. Kraevie zadachi matematicheskoy fiziki. –M. Nauka, 1973. -407 b.
4. Samarskiy A.A., Andreev V.B. Raznosnie metodi dlya ellipticheskih uravneniy.-M.: Nauka, -1976. -352 b.
5. Prikazchikov V.G., Allanazarov J.P. Tochnost diskretnoy spektralnoy zadachi so smeshannoy proyzvodnoy.//Izves. Visshey ucheb. zavedenii.-1991.-9.-s.83-86.