FUNKCIANIŃ SHARCIZ EKSTREMUMIN TABIWDA KVAZINYUTONLIQ USILLARDAN FAYDALAQNIW

J.P. Allanazarov
Ajiniyaz atındaǵı NMPI

ANNOTACIYA

Maqalada kvazinyuton usılı menen funkcianıń shártsiz ekstremumın tabıwǵa mısal kórsetilgen hám bul usıldıń Niyuton usılına salıstırǵanda abzallıqları ámelde sınalǵan.

ANNOTATSIYA

Maqolada kvazinyuton usuli bilan funkcianing shartsiz ekstremumini topishǵa misol yoritilgan va bu usulding Niyuton usuliga solishtirǵanda afzalliklari amalda sinalgan.

АННОТАЦИЯ

В статье описан пример нахождения безусловного экстремума функции методом квазиньютона, а также проверены на практике преимущества этого метода по сравнению с методом Ньютона.

ABSTRACT

The article describes an example of finding the unconditional extremum of a function by the quasi-Newton method, and also tested in practice the advantages of this method in comparison with the Newton method.

Nyuton usılının' kemshiliklerinen qutılıw ushın iteraciyalıq processtin' barısında Gesse matricasın ha'm og'an keri matricanı jasaw talap etilmeytug'ın, al olardı juwıqlastırıw iske asırılatug'ın, onın' bir neshe o'zgertilgen tu'rleri islenip shıg'ılg'an. Bul iteraciyalıq processtin' ha'r bir adımında orınlanatug'ın arifmetikalıq a'mellerdin' sanın a'dewir azaytıwg'a mwmkinshilik beredi. Sha'rciz ekstremum ma'selelerin sheshiwdin' bunday usılları kvazinyutonlıq yamasa o'zgermeli o'lshemler usılları dep ataladı. Belgili kvazinyuton usıllarının' ko'pshiligi, $f(x)$ funkciyası Nyuton usılında ko'rsetilgen qa'siyetlerge iye bolg'anda, sızıqlıdan joqarı tezlik penen lokal jıynaqlı bolatug'ını da'lillengen [1,2,3,4].

Endi kvazinyuton usıllarının' esaplaw algoritmleri menen tanısamız.

Meyli $f(x)$ eki ret u'zliksiz differenciallanatug'ın funkciya bolsın. Sonda mına iteraciyalıq usıldı qaraymız:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}, \quad h^{(k)} = -H_k f'(x^{(k)}) \qquad (1)$$

Bundag'ı H_k matricasın, ol bazı bir ma'niste $\left(f''(x^{(k)})\right)^{-1}$ matricasın juwıqlastırg'anday etip saylap alamız. Bunın' ushın

$$f'(x^{(k)}) - f'(x^{(k+1)}) = f''(x^{(k+1)})(x^{(k)} - x^{*}) + 0\left(\left\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\right\|\right)$$

ten'liginde $f''(x^{(k+1)})$ aynımag'an matrica dep uyg'arıp, $\left\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\right\|$ shaması menen salıstırg'anda a'dewir joqarı ta'rtipli kishi ag'zalarg'a shekemgi da'llik penen

$$\left(f''(x^{(k+1)})\right)^{-1}\left(f'(x^{(k+1)}) - f'(x^{(k)})\right) \approx x^{(k+1)} - x^{(k)} \qquad (2)$$

juwıq ten'ligin jazıwg'a boladı. Egerde bunda

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) \qquad (3)$$

ko'rinisindegi kvadratlıq funkciya ha'm A-simmetriyalı on' anıqlang'an matrica bolsa, onda $f'(x) = Ax + b, \quad f''(x) = A$ boladı. Bul jag'dayda (2) juwıq ten'ligi mına da'l ten'ligine aylanadı:

$$\left(f''(x^{(k+1)})\right)^{-1} \Delta y^{(k)} = \Delta x^{(k)},$$

$$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}, \quad \Delta y^{(k)} = f'(x^{(k+1)}) - f'(x^{(k)})$$

Sonlıqtan $\left(f''(x^{(k)})\right)^{-1}$ matricasın juwıqlastırıwshı H_{k+1} matricası ushın

$$H_{k+1} \ \Delta \mathrm{y}^{(\mathrm{k})} = \Delta \mathrm{x}^{(\mathrm{k})} \qquad (4)$$

sha'rtinin' orınlanıwın talap etiw ta'biyg'ıy na'rse boladı. Bul sha'rt kvazinyutonlıq sha'rt dep ataladı. Ol $(f'')^{-1}$ matricasın juwıqlastırıwdın' ko'plegen usıllarının' tiykarında jatadı. Ha'r bir adımında (3) kvazinyutonlıq sha'rtleri orınlanatug'ın, sha'rciz ekstremum ma'selelerin sheshiw usılları da kvazinyutonlıq usıllar dep ataladı.

Meyli iteraciyalıq usıldın' bir adımınan ekinshisine o'tkende $(f'')^{-1}$ matricasın juwıqlastıratug'ın matrica

$$H_{k+1} = H_k + \Delta H_k \qquad (5)$$

formulası menen anıqlanatug'ın bolsın. Bundag'ı qosımsha ΔH_k matricasın (4)-sharti orınlang'anday etip saylap aladı. Bunın' ushın (4)-ni to'mendegi ko'riniste jazadı:

$$\Delta H_k \ \Delta \mathrm{y}^{(\mathrm{k})} = \Delta \mathrm{x}^{(\mathrm{k})} - H_k \ \Delta \mathrm{y}^{(\mathrm{k})}$$

Bul ten'likti

$$\Delta H_k = \frac{1}{\left(z^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)}\left(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}\right) \cdot z^{(k)} \qquad (6)$$

formulası menen anıqlang‘an, rangi 1 ge ten’ matrica qanaatlandıradı. Bunda $z^{(k)}, \left(z^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right) \neq 0$ sha’rtin qanaatlandıratug‘ın, qa’legen vektor. Bul jerde ha’m paragraftın’ aqırına shekem $u=(u_1,u_2,...,u_m)$, $v=(v_1,v_2,...,v_n)$ vektorları ushın

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n \\ - & - & - & - \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \dots & u_mv_n \end{bmatrix}$$

belgilewi paydalanıladı.

Sonda $z^{(k)} = \Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}$ dep alıp ha’m (6) da $(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)}) \neq 0$ dep uyg‘arıp, (5) ni to‘mendegishe jazıwg‘a boladı:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\left(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}\right)\cdot\left(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}\right)}{\left(\Delta x^{(k)} - H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} \qquad (7)$$

Ko‘binese, (3) sha’rtin qanaatlandıratug‘ın mına formulalardan da paydalanadı:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta x^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)}}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} - \frac{H_k\left(\Delta y^{(k)} \cdot \Delta y^{(k)}\right)H_k}{\left(H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)}, \qquad (8)$$

$$H_{k+1} = H_k + \left[1 + \frac{\left(H_k \Delta y^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)}\right]\frac{\Delta x^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)}}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} - $$
$$- \frac{\left(\Delta x^{(k)} \cdot \Delta y^{(k)}\right)H_k}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} - \frac{H_k\left(\Delta y^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)}\right)}{\left(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\right)} \qquad (9)$$

Bul (7), (8), (9) formulalarınan paydalang‘anda baslang‘ısh H_0 matricası esabında qa’legen on’ anıqlang‘an simmetriyalı matricanı alıwg‘a boladı. İs ju’zinde H_0 matricası esabında ko‘binese birlik matricanı aladı.

Kvazinyutonlıq usıllarda adımnın’ uzınlıg‘ı ko‘pshilik jag‘daylarda, berilgen to‘men tu’siw bag‘ıtının’ u’stinde

$$f(x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^{(k)} + \alpha h^{(k)}) \qquad (10)$$

ma’selesinin’ sheshimi esabında anıqlanadı. Ayırım jag‘daylardı adımnın’ uzınlıg‘ın saylap alıwdın’ basqa usıllarınan da paydalanadı. Ma’selen, Nyuton usılındag‘ı sıyaqlı $\alpha_k = 1$ dep aladı yamasa α_k nin’ ma’nisi adımdı maydalaw arqalı anıqlanadı ((4.6) formulasına qaran’).

Dara jag‘dayda (3) kvadratlıq funkciyası ushın (1), (7)-(9),(10) u’sh usılı da qa’legen $x^{(0)} \in E^n$ baslang‘ısh juwıqlasıwınan birdey $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$ noqatlar izbe-izligine alıp keledi. Sonın’ menen birge, $H_n = \left(f''(x^{(n)})\right)^{-1} = A^{-1}$, $x^{(n)} = x^* = -A^{-1}b = \arg\min_{x \in E^n} f(x)$ ten’likleri orınlanadı, yag‘nıy kvazinyutonlıq usıllar kvadratlıq funkciyanın’ minimumın n adımda tabıwg‘a mu’mkinshilik beredi.

Kvadratlıq emes funkciyalar ushın bunday jag‘daylar durıs bola bermeydi. Biraqta, bazı bir uyg‘arıwlarda $k \to \infty$ ke umtılg‘anda

$$H_k - \left(f''(x^{(k)})\right)^{-1} \to 0, \quad x^{(k)} \to x^*$$

umtılatug‘ının ha’m jıynaqlılıq tezligi sızıqlıdan joqarı bolatug‘ının ko‘rsetiwge boladı [12,21,23]. Ma’selen, egerde $f(x)$ E^n ken’isliginde eki ret u’zliksiz differenciallanatug‘ın, qatan’ oyıs funkciya bolsa, onda qa’legen $x^{(0)} \in E^n$ baslang‘ısh juwıqlasıwında (1), (8), (10) formulaları menen anıqlang‘an $\{x^{(k)}\}$ noqatlar izbe-izligi x^* minimum noqatına jıynaqlı boladı. Al, egerde $f(x) \le f(x^{(0)})$ ten’sizligin qanaatlandıratug‘ın barlıq x lar ushın

$$\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le M\left\|x - x^*\right\|, \quad i,j = 1,2,\ldots,n$$

ten’sizlikleri orınlı bolsa, onda $\{x^{(k)}\}$ noqatlar izbe-izligi x^* noqatına sızıqlıdan joqarı tezlik penen jıynaqlı boladı [12,21,23].

Kvazinyutonlıq usıllardın’ o‘zgermeli o‘lshemler usılı dep te atalıwının’ ma’nisi mınada. Qa’legen simmetriyalı ha’m on’ anıqlang‘an H_k matricası $(u,v)_k = (H_k u, v)$ skalyar ko‘beymesin ha’m onın’ menen baylanısqan o‘lshemdi anıqlaydı. Haqıyqatında da, $f(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) - f(x^{(k)})$ o‘siminin’ sızıqlı u’lesi

$\left(f'(x^{(k)}), \Delta x^{(k)}\right) = \left(H_k H_k^{-1} f'(x^{(k)}), \Delta x^{(k)}\right) = \left(H_k^{-1} f'(x^{(k)}), \Delta x^{(k)}\right)_k$ ko‘rinisine iye boladı. Sonlıqtan, $H_k^{-1} f'(x^{(k)})$ vektorın $(,)_k$ skalyar ko‘beymeli ken’isliktin’ $x^{(k)}$ noqatındag‘ı f(x) funkciyasının’ gradienti dep esaplawg‘a boladı. Solay etip, (1) usılı gradientlik usıldın’ o‘zgermeli o‘lshemli ken’islik ushın ulıwmalastırılıwı boladı.

Kvazinyutonlıq usıllar sha’rciz optimizaciyalaw ma’selelerin sheshiwdin’ na’tiyjeli usılları boladı. Olar jetkilikli joqarı jıynaqlılıq tezligine iye bolıp, esaplaw algoritmlerin iske asırg‘anda funkciyanın’ ekinshi ta’rtipli dara tuwındılarınan du’zilgen Gesse matricasın ha’m og‘an keri matricanı anıqlaw sıyaqlı u’lken ko‘lemdegi esaplaw jumısların orınlawdı talap etetug‘ın quramalı ma’seleler sheshilmeydi. Biraqta bul usıllar mınaday kemshilikke iye: ken’isliktin’ o‘lshemi n u’lken bolg‘anda iteraciyalıq processtin’ ha’r bir adımında H_k matricaların esaplaw ha’m saqlaw EEM nin’ yadının’ ko‘lemine joqarı talaplar qoyadı.

Mısal. To‘mendegi kvadratlıq funkciyanın’ minimum noqatın kvazinyutonlıq usıl menen tabın’:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 x_2 + x_1$$

Sheshiliwi. Bul mısal 7- § ta Nyuton usılı menen sheshilgen edi. Ma’selenin’ sheshimine $x^{(0)} = (0,0)'$ baslang‘ısh juwıqlasıwın alıp, kvazinyutonlıq usıldı qollanıw ushın to‘mendegi esaplawlardı orınlaymız:

$$f'(x) = (8x_1 - 4x_2 + 1;\ 6x_2 - 4x_1), \quad f'(x^{(0)}) = (1,0)', \quad f(x^{(0)}) = f(0,0) = 0$$

1-adımı. a) $h^{(0)} = -f'(x^{(0)}) = -f'(0,0) = (-1,0)'$; $x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha \cdot f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\varphi_0(\alpha)=4(-\alpha)^2+(-\alpha)=4\alpha^2-\alpha,$

$\varphi_0'(\alpha)=8\alpha-1=0, \quad \alpha=\alpha_0=1/8;$

$x^{(1)}=(-1/8,\ 0)';$

$f'(x^{(1)})=(0,\ 1/2)';$

b) $k=1$ bolg‘anda $H_1=H_0+\Delta H_0, \quad H_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=E$ - birlik matrica;

v) ΔH_0 ha’m H_1 matricaların anıqlaw ushın (8) formulasınan paydalanamız. Bunın’ ushın da’slep to‘mendegi shamalardı esaplaymız:

$$\Delta x^{(0)}=x^{(1)}-x^{(0)}=\begin{pmatrix}-1/8\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/8\\ 0\end{pmatrix}=(-1/8,\ 0)';$$

$$\Delta y^{(0)}=f'(x^1)-f'(x^0)=\begin{pmatrix}0\\ 1/2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1/2\end{pmatrix}=(-1,\ 1/2)';$$

$$\Delta x^{(0)}\cdot\Delta x^{(0)}=\begin{bmatrix}1/64 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}; \quad \Delta y^{(0)}\cdot\Delta y^{(0)}=\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1/4\end{bmatrix};$$

$$\left(\Delta x^{(0)},\Delta y^{(0)}\right)=1/8; \quad \frac{\Delta x^{(0)}\cdot\Delta x^{(0)}}{\left(\Delta x^{(0)},\Delta y^{(0)}\right)}=8\begin{bmatrix}1/64 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/8 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$H_0\Delta y^{(0)}=(-1,\ 1/2)', \quad \left(H_0\Delta y^{(0)},\ \Delta y^{(0)}\right)=5/4;$$

$$H_0(\Delta y^{(0)}\cdot\Delta y^{(0)})H_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1/4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1/4\end{bmatrix};$$

$$\frac{H_0(\Delta y^{(0)}\cdot\Delta y^{(0)})H_0}{(H_0\Delta y^{(0)},\Delta y^{(0)})}=\frac{4}{5}\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4/5 & -2/5\\ -2/5 & 1/5\end{bmatrix};$$

$$H_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/8 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4/5 & -2/5\\ -2/5 & 1/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13/40 & 2/5\\ 2/5 & 4/5\end{bmatrix}$$

g) H_1 matricasının’ durıs tabılg‘anlıg‘ına iseniw ushın (4) kvazinyutonlıq sha’rtinin’ orınlanıwın ko‘remiz:

$$H_1\Delta y^{(0)}=\begin{bmatrix}13/40 & 2/5\\ 2/5 & 4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/8\\ 0\end{bmatrix}$$

Demek, $H_1\Delta y^{(0)}=\Delta x^{(0)}=(-1/8,\ 0)'$, yag‘nıy kvazinyutonlıq sha’rti orınlandı.

2-adımı. a) $H_1 f'(x^{(1)})=\begin{bmatrix}13/40 & 2/5\\ 2/5 & 4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5\\ 2/5\end{bmatrix};$

b) $x^{(2)}=x^{(1)}-\alpha\cdot H_1 f'(x^{(1)})=\begin{pmatrix}-1/8\\ 0\end{pmatrix}-\alpha\cdot\begin{pmatrix}1/5\\ 2/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/8-1/5\alpha\\ -2/5\alpha\end{pmatrix};$

$$\varphi_0(\alpha)=4\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\alpha\right)^2+3\left(-\frac{2}{5}\alpha\right)^2-4\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\alpha\right)\left(-\frac{2}{5}\alpha\right)+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\alpha\right),$$

$$\varphi_0'(\alpha)=8\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\alpha\right)\left(-\frac{1}{5}\right)+6\left(-\frac{2}{5}\alpha\right)\left(-\frac{2}{5}\right)-4\left(\frac{1}{20}+\frac{4}{25}\alpha\right)-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{8}{25}\alpha+$$

$$+\frac{24}{25}\alpha-\frac{1}{5}-\frac{16}{25}\alpha-\frac{1}{5}=\frac{8\alpha+24\alpha-16\alpha}{25}-\frac{1}{5}=\frac{16}{25}\alpha-\frac{1}{5}, \quad \frac{16}{25}\alpha-\frac{1}{5}=0,$$

$$\alpha=\alpha_1=5/16; \quad x_1^{(2)}=-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{16}=-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=-\frac{3}{16}, \quad x_2^{(2)}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{16}=-\frac{1}{8},$$

$$x^{(2)}=(-3/16,-1/8)'; \quad f(x^{(2)})=-3/32, \quad f'(x^{(2)})=f'(-3/16,-1/8)=(0,0)'$$

Demek, $x^* = x^{(2)} = (-3/16, -1/8)'$ vektorı berilgen ma’selenin’ sheshimi boladı. Berilgen funkciya kvadratlıq funkciya bolg‘anlıqtan ha’m esaplawlar qa’tesiz orınlang‘anlıqtan ma’selenin’ da’l sheshimi kvazinyutonlıq usıldın’ ekinshi adımında aq tabıldı.

Kvazinyutonlıq usıllardı qollanıwg‘a baylanıslı, olardın’ mınaday jaqsı qa’siyetin ayrıqsha atap o‘temiz: k nın’ o‘siwi menen H_k matricası Gessenin’ $J^{-1}(x^{(k)})$ keri matricasına umtıladı. Ma’selen, joqarıdag‘ı mısal jag‘dayında

$$J = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

boladı. Endi (8) formulasınan paydalanıp, H_2 matricsın esaplaymız:

a) $\Delta x^{(1)} = x^{(2)} - x^{(1)} = (-1/16,\ -1/8)'$,

$\Delta y^{(1)} = f'(x^2) - f'(x^1) = (0,\ 0)' - (0,\ 1/2)' = (0,\ -1/2)'$;

b) $H_2 = \begin{bmatrix} 13/40 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$;

v) $H_2 \Delta y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/16 \\ -1/8 \end{bmatrix} = (-1/16,\ -1/8)'$, $\quad H_2 \Delta y^{(1)} = \Delta x^{(1)} = (-1/16,\ -1/8)'$

yag‘nıy kvazinyutonlıq sha’rti orınlandı. Demek, H_2 matricası durıs tabılg‘an. Solay etip, bul esaplawlardan $H_2 = J^{-1}$ bolatug‘ını kelip shıg‘adı.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI: (REFERENCES)

1. Dennis Dj., Shnabel R. Chislennie metodi bezuslovnoy optimizacii i resheniya nelineynix uravneniy.-M.:Mir,1988.

2. Rekleytis G., Reyvindran A., Regsdal K. Optimizaciya v texnike. T.1, T.2. –M.: Mir,1986.

3. Suxarev A.G., Timoxov A.V., Fedorov V.V. Kurs metodov optimizacii. –M.: Nauka, 1986.

4. Otarov A.O., Allanazarov J.P., Otarov A.A. Sızıqlı emes programmalastırıw máselelerin sheshiw usılları. Nókis. Bilim.2009.