UDK 517.518.87

INTERPOLYATSION KUBATUR FORMULALAR VA UNING ALGARITMLARI

Abdullayev Behzod Rajabovich
Toshkent irrigatsiya va qishloq xo‘jaligini mexanizatsiyalash muhandislari instituti Milliy tadqiqot unversiteti Buxoro tabiiy resurslarini boshqarish instituti “Matamatika va tabiiy fanlar ” kafedrasi assistenti.
E-mail: behzodbek0202@gmail.com

Qobilov Komiljon Hamidovich
Buxoro davlat universiteti Axborot texnologiyalari fakulteti "Amaliy matematika va dasturlash texnologiyalari" kafedrasi o‘qituvchisi.
E-mail: qobilovkomiljon1@gmail.com

ANNOTATSIYA

Buyuk matematik Gauss kvadratura nazariyasiga butunlay yangi va juda muhim g‘oyani kiritdiki, u amaliy analizning tub sohalari rivojlanishi uchun asos bo‘lib qoldi. Faraz qilaylik, ba’zi bir $y = f(x)$ integrallanuvchi funksiya x o‘zgaruvchining uzluksiz oraliqni xar bir nuqtasida emas balkim, shu oraliqda yotuvchi maxsus tanlangan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nuqtalarda berilgan bo‘lsin. Biz bu yerda faqat chekli oraliqni qaraymiz.

Kalit so‘zlar: interpolyatsion, kubatur, kvadratur formulalar, Gauss formulasi.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ И ЕЕ АЛГОРИТМЫ

Абдуллаев Бехзод Раджабович - Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Национальный исследовательский университет, Бухарский институт природопользования, ассистент кафедры «Математика и естественные науки». behzodbek0202@gmail.com.

Кабилов Комилжон Хамидович – преподаватель кафедры «Прикладная математика и технологии программирования» факультета информационных технологий Бухарского государственного университета. qabilovkomiljon1@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Великий математик Гаусс внес в теорию квадратур совершенно новую и очень важную идею, ставшую основой для развития фундаментальных направлений практического анализа. Предположим, что некоторая интегрируемая функция задана не в какой-либо точке непрерывного интервала переменной, а в специально выбранных точках, лежащих в этом интервале. Здесь мы рассматриваем только конечный диапазон.

Ключевые слова: интерполяция, кубатура, квадратурные формулы, формула Гаусса.

INTERPOLATION CUBATURE FORMULAS AND ITS ALGORITHMS

Abdullayev Behzod Rajabovich - Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, National Research University, Bukhara Institute of Natural Resources Management, assistant of the "Mathematics and Natural Sciences" department. behzodbek0202@gmail.com.

Kabilov Komiljon Hamidovich is a teacher of the Department of "Applied Mathematics and Programming Technologies" at the Faculty of Information Technologies of Bukhara State University. qabilovkomiljon1@gmail.com

ABSTRACT

The great mathematician Gauss introduced a completely new and very important idea to the theory of quadrature, which became the basis for the development of fundamental areas of practical analysis. Let us assume that some integrable function is given not at any point of the continuous interval of the variable, but at specially selected points lying in this interval. We are only looking at a finite range here.

Keywords: interpolation, cubature, quadrature formulas, Gauss formula.

1.1. Interpolyatsion kvadratur formulalar uchun algoritm va dasturlar.

Buyuk matematik Gauss kvadratura nazariyasiga butunlay yangi va juda muhim g‘oyani kiritdiki, u amaliy analizning tub sohalari rivojlanishi uchun asos bo‘lib qoldi. Faraz qilaylik, ba’zi bir $y = f(x)$ integrallanuvchi funksiya x o‘zgaruvchining uzluksiz oraliqni xar bir nuqtasida emas balkim, shu oraliqda yotuvchi maxsus tanlangan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nuqtalarda berilgan bo‘lsin. Biz bu yerda faqat chekli oraliqni qaraymiz. Shuning uchun uni darhol normalab qo‘yamiz.

Oraliqni

$$-1 \le x \le 1 \ , \tag{1.1}$$

ga keltiramiz va $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ nuqtalar ham qaysikim, $y = f(x)$ funksiya berilgan oraliqda tegishli bo‘lsin. Umuman olganda n ning katta bo‘lishidan qat’iy nazar,

$$y_1 = f(x_1)\ ,\ y_2 = f(x_2), \dots,\ y_n = f(x_n)\ , \tag{1.2}$$

ordinatalar $f(x)$ funksiyani aniqlash uchun yetarli emas. Lekin biz $f(x)$ funksiyani oraliq nuqtalari uchun integrallashga harakat qilamiz. Shu maqsadda x ning darajali funksiyalaridan foydalanamiz. Biz shunday $n-1$darajali $P_{n-1}(x)$ ko‘phad topishimiz mumkinki , u ham x_n nuqtalarda y_n qiymatga ega bo‘ladi. Odatda chekli ayirmalarni hisoblashda berilgan $x = x_n$ nuqtalar teng taqsimlangan qilib taqsimlanadi.

Gaussning g‘oyasi shundan iboratki nuqtalarning holatini oldindan belgilamasdan o‘shanday sondagi ordinatalar bilan yuqori aniqlikka erishish mumkinligi kabi, bu yerda nuqtalar shunday joylashtiriladiki, natijada eng yaxshi natijalar olinadi. Bu yo‘lda Gauss kvadratur formulalarning nafaqat eng yuqori aniqlikka erishdi, balkim bu jarayon ko‘phadlar bilan teng taqsimli interpolyatsiyalashda xavfdan ham xolidir. Qaysikim bu xavf u davrda ham ma’lum emasdi. Faraz qilaylik $x = x_k$ interpolyatsiyalash nuqtalari tamoman erkin bo‘lsin va biz bu nuqtalarda $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ qiymatlarni qabul qiladigan $U = P_{n-1}(x)$ ko‘phadni topamiz. Bu masalani hal qiladigan formula Lagranjning interpolyatsion formulasi sifatida ma’lum. U

$$F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n), \tag{1.3}$$

fundamental ko‘phadni qurishga va uni ketma-ket har bir n ta ikki hadliga bo‘lishga asoslangandir.

Shunday qilib biz quyidagi xossalarga ega bo‘lgan

$$Q_i(x) = \frac{F_n(x)}{F_n^{'}(x_i)(x - x_i)} \qquad \text{(i=1,2,…,n)}, \tag{1.4}$$

ko‘phadni oldik . $Q_i(x)$ $x = x_i$ nuqtadan tashqari barcha $x = x_k$ nuqtalarda nolga teng, $x = x_i$ da esa birga teng. Agar f_{ik} - **Kroneker** simvolini kiritsak, ya’ni

$$Q_i(x_k) = f_{ik} = \begin{cases} 1, агар \ \ i = k \\ 0, агар \ \ i \neq k \end{cases} \quad , \tag{1.5}$$

Bu holda qurish mumkinki ,

$$P_{n-1}(x) = y_1 Q_1(x) + y_2 Q_2(x) + ... + y_n Q_n(x), \tag{1.6}$$

ko‘phad qo‘yilgan shartni qanoatlantiradi: ya’ni $x = x_k$ nuqtalarda y $y = y_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ qiymatlarni qabul qiladi .

$P_{n-1}(x)$ - ko‘phadning yagonaligi shu dalildan kelib chiqadiki , $P_{n-1}(x)$ ko‘phad bilan ikkinchi gipotetik $\overline{P}_{n-1}(x)$ ko‘phad o‘rtasidagi ayirma birga $x = x_k$ nuqtalarda nolga aylanadi . Lekin $P_{n-1}(x) - \overline{P}_{n-1}(x)$ ayirma ham yana $n-1$ darajali ko‘phad bo‘lib, u esa aynan nolga aylanmasdan $n-1$ tadan tub ildizga ega bo‘lmaydi: bu esa $P_{n-1}(x) = \overline{P}_{n-1}(x)$ ekanligini bildiradi.[3]

Endi agar biz $P_{n-1}(x)$ ni $y = f(x)$ funksiyaga yetarlicha yaqinlashgan deb hisoblasak,

$$\overline{A} = \int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} y_k \int_{-1}^{1} Q_k(x)dx \quad , \qquad (1.7)$$

hisoblasak, amaliyotda noma’lum $f(x)$ egrilik ostidagi yuzaga ega bo‘lamiz. Berilgan ayrim taqsimlangan $x = x_k$ nuqtalar uchun $Q_k(x)$ ko‘phadlar bir qiymatli aniqlangan va shuning uchun ham

$$\int_{-1}^{1} Q_k(x)dx = \omega_k \quad , \qquad (1.8)$$

aniq integrallar ba’zi bir sonli qiymatlarga ega bo‘ladiki, qaysikim ular uchun jadvallar tuzish mumkin.

Bizni qiziqtiruvchi yuza uchun bu qiymatlar tamoman $y = f(x)$ funksiyaning tabiatiga bog‘liq emas.

Oldingi $x = x_i$ nuqtalarni o‘zgartirmasdan yangi $x = x_{n+1}$ qo‘shimcha nuqtani qo‘shamiz. Qo‘shimcha $x - x_{n+1}$ ikki hadni kiritib, $Q_{n+1}(x)$ - qo‘shimcha ko‘phadni xosil qilamiz. (1.4) ta’rifdan $Q_i(x)$ uchun kelib chiqadiki, $Q_{n+1}(x)$ ko‘phad $F_n(x)$ ko‘phadga proporsionaldir, qaysikim $(x - x_{n+1})$ yangi ko‘paytuvchi qisqarib ketadi. Xuddi shunday yangi y_{n+1} ordinata ko‘paytiriladigan vaznli ω_{n+1} vaznli ko‘paytuvchi

$$\int_{-1}^{1} F_n(x)dx \quad , \qquad (1.9)$$

aniq integralga proporsionaldir. Shunga o‘xshash, agar yangi

$$x = x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \quad , \qquad (1.10)$$

nuqtalarni ularni ordinatalari bilan kiritsak, u holda ularga mos

$$\omega_{n+1},\ \omega_{n+2},\ \dots,\ \omega_{n+m}\ ,$$

vaznlar
$$\omega_{n+i} = \int_{-1}^{1} F_n(x)\ \xi_{m-1}^{i}(x)\ dx\ ,$$

(1.11)

integral bilan aniqlanadi, bu yerda $\xi_{m-1}^{i}(x)$ ayrim $m-1$ darajali ko‘phadlardir. Ixtiyoriy $\xi_{m+1}(x)$ ko‘phad, $x^0, x^1,\ x^2, \dots, x^{m-1}$ darajali funksiyalarning chiziqli superpozitsiyasidan iborat ekanligidan, agar $F_n(x)$ quyidagi integrallarni qanoatlantirsa, bu hamma vaznlar avtomatik ravishda nolga aylanadi.

$$\int_{-1}^{1} F_n(x)dx = 0, \dots, \int_{-1}^{1} F_n(x)\,x^{m-1}\ dx = 0\ , \qquad (1.12)$$

haqiqatdan ham bizning talablarimiz $m = n$ gacha borib,

$$\int_{-1}^{1} F_n(x)\,x^{\alpha}\ dx = 0 \qquad (\alpha = 0,1,2,\dots,n-1)\ , \qquad (1.13)$$

integral shartining bajarilishidir.

Natijada bizning boshida berilgan n ta nuqtani ixtiyoriy ravishda qo‘shsak ham baribir xech bir yangi ordinata oldingi natijalarni o‘zgartirmaydi.

Oldingi natija shundan iboratki, xuddi biz $2n$ ta ordinata bilan ish ko‘rib, haqiqatdan esa biz n ta ordinatadan foydalanamiz, yangi qurilgan ordinatalar esa hisoblanayotgan yuzaga hech nima tushmaydi.

Bu jarayonda biz $\overline{A} = \sum_{k=1}^{2n} y_k\ \omega_k$ yigindiga n ta hadni tejaymiz. Bu fikrlashlar yuqoridagi muloxazalar uchun yetarlicha emasdir. To‘liqroq bo‘lishi uchun quyidagi muloxazani tavsiya etamiz.

Haqiqatdan ham yangi $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ nuqtalarning berilishi nafaqat $Q_{n+m}(x)$ $(m = 1,2,\dots,n)$ yangi ko‘phadlarni qo‘shadi, xatto oldingi $Q_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ ko‘phadlar ham o‘zgaradi: xar bir yangi x_{n+m} nuqta $Q_i(x)$ ga qo‘shimcha $\dfrac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}$ ko‘paytuvchini kiritadi.

Shunday qilib, yangi m ta $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ nuqtalarning kiritilishi oldingi $Q_i(x)$ ko‘phadni

$$Q_i^*(x) = Q_i(x)\ \frac{x - x_{n+1}}{x_i - x_{n+1}} \cdot \frac{x - x_{n+2}}{x_i - x_{n+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}} \quad , \qquad (1.14)$$

ko'phadga aylantiradi.

Yuqoridagi muloxazalarning haqiqat ekanligi shakli o'zgartirilgan $Q_i^*(x)$ ko'phadlarning quyidagi xossalarga ega ekanligidan kelib chiqadi:

1^0. $Q_i^*(x) = \delta_{ik}(k = 1, 2, \ldots, n)$.

2^0. $\int_{-1}^{1} Q_i^*(x)\, dx = \int_{-1}^{1} Q_i\,(x)\, dx = \omega_i$

endi bu xossalarni isbotini ko'ramiz.

Birinchi xossa bevosita (α) munosabatdan kelib chiqadi. Ikkinchisi uchun esa

$$\frac{x - x_{n+k}}{x_i - x_{n+k}} = 1 + \frac{x - x_i}{x_i - x_{n+k}} \quad ,$$

dan foydalanamiz.

Bundan shuni xulosa qilamizki, (α) tenglikning o'ng tomonidagi qo'shimcha ko'paytuvchilarni ko'paytirishni $1 - \xi_{m-1}^i(x)$ ko'rinishda tasvirlash mumkin ekan, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x) -\ \ m-1$ darajali ko'phad. (2.13) shartning kuchiga asosan 2^0 - tenglik bajariladi. Isbotlangan 1^0 va 2^0 lar ko'rsatadiki yangi ordinatalar oldingi olingan natijalarni o'zgartirmaydi.

Muhimrog'i shundan iboratki, bizlar qo'shimcha $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n}$ ordinatalarni bilishimiz shart emas.

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^{n} y_k\ \omega_k \ ,$$

yigindi n ordinata yordami bilan shunday aniqlikdagi yuzani beradiki, agar biz $2n$ - ordinata olsak ham o'zgarmaydi.

(1.13) - tipdagi integral shart ortogonallash sharti deyiladi. Biz ko'rsatamizki, $F_n(x)$ ko'phad $1, x^1, \ \ x^2, \ldots, x^{n-1}$ darajali funksiyalarga ortogonaldir. Bunday shartlarni oldin ortogonal funksiyalar sistemasini ko'rib chikkanda o'rganganmiz.

Biz Yakobi ko'phadlarini tekshirib chiqdikki, u (1.13) shart ma'nosida ko'phad darajasidan past bo'lgan barcha x ning darajalariga ortogonallik xossalariga egadir. Ammo ortogonallik sharti umumiy holda yana $\rho(x)$ vazn ko'paytuvchini ham integral ostiga oladi. Faqat maxsus hollarda "Lagranj ko'phadlari" da bu vazn ko'paytuvchi birga teng bo'ladi va shunday qilib, ortogonallik oddiy ortogonallikka aylanib qoladi. Shunday qilib, $F_n(x)$ funksiyani tanlash masalasi hal qilinadi:

Gauss metodi $F_n(x)$ ni n - Lagranj ko‘phadlari bilan mos qo‘yishni talab qiladi: bu ko‘phad ildizlari bizga shunday nuqtalarni beradiki, qaysikim $f(x)$ funksiya qiymatlari berilgan bo‘ladi. ω_i koeffisentlarning sonli qiymatlari bilan birga shu ildizlarning juda aniq jadvallari borki, u (1.8) formula bilan hisoblanadi.

Bizga ma’lumki, $[a,b]$da n nuqtali interpolyatsion formulaning

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) , \qquad (1.15)$$

tugun nuqtalari $[a,b]$ oraliqda qanday joylashganliklaridan qat’iy nazar, $(n-1)$ - darajali ko‘phadlar aniq integrallanishi qaraladi. Chekli $[a,b]$ oraliq va $\rho(x) \equiv 1$ uchun Gauss quyidagi masalani qaragan edi. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tugunlar shunday tanlanganki , (1.15) formula mumkin qadar darajasi eng yuqori bo‘lgan ko‘phadlarni aniq integrallasin. (1.15) formula n ta parametr - tugunlarni maxsus ravishda tanlash yo‘li bilan uning aniqlik darajasini n birlikka ortirishni kutish mumkin. Haqiqatdan ham $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tugunlarni maxsus ravishda tanlash orqali (1.15) formulaning darajasini $2n-1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko‘phadlar uchun aniq bo‘lishga erishishni Gauss ko‘rsatdi. Qanchalik Gaussning natijasi ixtiyoriy oraliq va vazn funksiyalar uchun umumlashtirildi. Bunday formulalar Gauss tipidagi kvadratur formulalar deyiladi. Qulaylik uchun x_n tugunlar o‘rnida

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) ,$$

ko‘phad bilan ish ko‘ramiz. Agar x_k lar ma’lum bo‘lsa, u holda $\omega_n(x)$ ham ma’lum bo‘ladi va aksincha. Lekin x_n larni topishni $\omega_n(x)$ ni topish bilan almashtirsak , u holda biz $\omega_n(x)$ ni ildizlari haqiqiy, har xil va ularning $[a,b]$ oraliqda yotishini ko‘rsatishimiz shart.[3]

<u>Teorema. 1.1.1</u> kvadratur formula darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan barcha ko‘phadlarni aniq integrallashi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir: 1) u interpolyatsion va 2) $\omega_n(x)$ ko‘phad $[a,b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan darajasi n dan kichik bo‘lgan barcha $Q(x)$ ko‘phadlarga ortogonal bo‘lishi kerak.

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n(x)Q(x)dx = 0 , \qquad (1.16)$$

Isbot. Zarurligi. Faraz qilaylik, (1.15) formula darajasi $2n-1$ dan oshmaydigan barcha ko‘phadlarni aniq integrallasin. U holda u interpolyatsiondir. Endi darajasi n dan kichik bo‘lgan ixtiyoriy $Q(x)$ ko‘phadni olib, $f(x)=\omega_n(x)Q(x)$ deb olamiz. Shuning uchun ko‘rinib turibdiki, $f(x)$ darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan ko‘phad. Shuning uchun ham uni (1) formula aniq integrallaydi:

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n(x)Q(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k\omega_k(x_k)Q(x_k)\cdot$$

Bu yerda, $\omega_n(x_k)=0 \quad (k=\overline{1,n})$ ni hisobga olsak (2.16) tenglik kelib chiqadi, chunki $r(x)$ darajasi n dan kichik ko‘phad va (1.15) formula interpolyatsiondir.

Yetarliligi. Faraz qilaylik (1) formula interpolyatsion va $\omega_n(x)$ ko‘phad darajasi n dan kichik bo‘lgan barcha ko‘phadlarga $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal bo‘lsin.Endi (2.15) formula darajasi 2n-1 dan ortmaydigan barcha f(x) ko‘phadlarni aniq integrallashini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham f(x) ni $\omega_n(x)$ ga bo‘lib,

$$f(x) = \omega_n(x)Q(x) + r(x)\ , \tag{1.17}$$

ni hosil qilamiz, hosil qilamiz, bu yerda $Q(x)$ va $r(x)$ larni darajalari n dan kichik. Bu tengliklarning har ikkala tomonini $\rho(x)$ ga ko‘paytirib, a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)\omega_n(x)Q(x)dx + \int_a^b r(x)\rho(x)dx.$$

Teorema shartiga ko‘ra o‘ng tomondagi birinchi integral nolga teng, ikkinchi integral esa $\int_a^b r(x)\rho(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k).$

Chunki r(x) daarajasi n dan kichik ko‘phad va (2.15) formula interpolyatsiondir.

Demak,

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k)\,,$$

lekin (2.17) ga ko‘ra $r(x) = f(x)$. Shuning uchun

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)\,.$$

Shu bilan birga teoremaning yetarli sharti isbot bo‘ldi.

$\omega_n(x)$ ko‘phad $\rho(x)$ vazn bilan $[a,b]$ oraliqda darajasi n dan kichik bo‘lgan barcha ko‘phadlar bilan ortogonal va bosh koeffisenti birga teng bo‘lishi uchun ish natijalariga ko‘ra , bunday $\omega_n(x)$ ko‘phad yagona hamda uning ildizlari haqiqiy, har xil va $[a,b]$ oraliqda yotadi. Demak, agar $\rho(x)$ vazn $[a,b]$ oraliqda o‘z ishorasini saqlasa, u holda xar bir $n=1,2,.....$ uchun $2n-1$ darajali ko‘phadlarni aniq integrallaydigan yagona (1.1.1) kvadratur formula mavjud.[13]

<u>Teorema 1.1.2</u> Agar $\rho(x)$ vazn [a,b] oraliqda o‘z ishorasini saqlasa, u holda x_k va A_k lar qanday tanlanganda ham (1.15) tenglik 2n darajali barcha ko‘phadlar uchun aniq bo‘la olmaydi.

Isbot. Kvadratur formulaning tugunlarini $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ lar orqali belgilab, quyidagi

$$f(x) = \omega_n^2(x) = [(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n)\,]^2,$$

2n- darajali ko‘phadni qaraymiz.

Ko‘rinib turibdiki, (1) formula bu ko‘phad uchun aniq emas, chunki

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)dx > 0,$$

va ixtiyoriy A_k koeffisentlar uchun $\sum_{k=1}^n A_k\omega_n^2(x_k) = 0.$

Gauss tipidagi kvadratur formula koeffisentlarining xossasi. Gauss tipidagi kvadratur formulaning barcha koeffisentlari A_k musbatdir. Haqiqatdan ham, 2n-2 darajali $f(x) = \varphi_{k,n}^2(x) = \frac{\omega_n(x)}{x-x_k}^2$, ko‘phad uchun quyidagi tengliklar bajarilishi ayondir. Bu ko‘phad uchun Gauss tipidagi formula aniqdir:

$$\int_a^b \rho(x)\,\varphi_{k,n}^2(x)dx = A_k[\omega_n'(x_k)]^2.$$

Bundan:

$$A_k = \frac{\int_a^b \rho(x)\varphi_{k,n}^2(x)dx}{[\omega_n'(x_k)]^2}\,, \tag{1.18}$$

o‘z navbatida bundan barcha A_k larning musbatligi kelib chiqadi.

Gauss tipidagi kvadratur formulaning qoldiq hadi:

<u>Teorema 1.1.3</u> Agar [a,b] oraliqda f(x) funksiya 2n-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo‘lsa, u holda shunday $\varepsilon \in [a,b]$ nuqta topiladiki, Gauss tipidagi kvadratur formulaning qoldiq hadi

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

uchun quyidagi tenglik o‘rinlidir:

$$R_n(f) = \frac{f^{2n}(\varepsilon)}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)\omega^2{}_n(x)dx. \tag{1.19}$$

Gauss kvadratur formulasining qoldiq hadi:

$$R_n(f) = \frac{1}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)f^{2n}(\mu)dx.$$

Gauss kvadratur formula bilan tanishdik, endi bu formulani Mathcad dasturida yechimini ko‘ramiz:

Gauss tenglamasining dasturi:

$$ORIGIN \equiv 1 \qquad n := 6$$

$$P(x) := \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n \text{ simplify } \rightarrow \frac{231}{16} \cdot x^6 - \frac{315}{16} \cdot x^4 + \frac{105}{16} \cdot x^2 - \frac{5}{16}$$

$$a := P(x) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-5}{16} \\ 0 \\ \frac{105}{16} \\ 0 \\ \frac{-315}{16} \\ 0 \\ \frac{231}{16} \end{pmatrix}$$

$$T(x) := \frac{2}{\left[1 - (x)^2\right] \cdot \left(\frac{d}{dx}P(x)\right)^2}$$

$$x := \text{polyroots}(a) \qquad k := 1..n$$

$$A_k := T(x_k)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.1713244923 \\ 0.3607615731 \\ 0.4679139346 \\ 0.4679139346 \\ 0.360761573 \\ 0.1713244924 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -0.9324695142 \\ -0.6612093864 \\ -0.2386191861 \\ 0.2386191861 \\ 0.6612093865 \\ 0.9324695142 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \frac{\sin(x^2)}{e^x} \qquad a := 0 \qquad b := 1$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0.1509125672 \qquad t_k := \frac{b-a}{2} \cdot x_k + \frac{b+a}{2}$$

$$\frac{b-a}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot f(t_k) = 0.1509125672$$

XULOSA

Interpolyatsion kubatur formulalar ko‘rib chiqilgan, ularni xatoliklari tahlil qilinib, effektivligi ko‘rib chiqilgan va interpolyatsion kubatur formular uchun algoritm va dastur tuzilib misollarda qo‘llanilgan.

РЕЗЮМЕ

Были рассмотрены интерполяционные кубатурные формулы, проанализированы их погрешности, рассмотрена их эффективность, созданы и использованы в примерах алгоритм и программа для интерполяционной кубатурной формулы.

SUMMARY

Interpolation cubature formulas were reviewed, their errors were analyzed, their effectiveness was considered, and an algorithm and program for the interpolation cubature formula were created and used in examples.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI: (REFERENCES)

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974 – 808с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Наука. 1988, - 333с.

Бахвалов Н.С.С Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной, Мат. заметки, 1972, т.2. №6, -С.655 – 664.