ЗАДАЧИ НА ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВЕКТОРА НА ПОДПРОСТРАНСТВА

Бахриддинова Азиза
Мамараимова Шахло
Панжиева Юлдуз
Студенты Джизакского филиала Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Шарипова С.Ф.
Научный руководитель:
Старший преподаватель Джизакского филиала Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека

АННОТАЦИЯ

В данном статье рассмотрены задачи на проектирование вектора на подпространства. Изучена понятия ортогонального дополнения и ортогональная проекция.

Ключевые слова. Пространства, подпространства, ортогональное дополнение, ортогональная проекция, ортогональная составляющая.

Определение. Два множества F и G векторов евклидова пространства E называются ортогональными, если каждый вектор из F ортогонален каждому вектору из G.

Определение. Пусть F – подпространство E. Совокупность всех векторов подпространства E, ортогональных подпространству F, называется ортогональным дополнением $F^{\perp}$ подпространства F.

Всякое ортогональное дополнение $F^{\perp}$ является, в свою очередь, линейным подпространством.

Всякое произвольное евклидово пространство E разлагается в прямую сумму своего произвольного подпространства F и его ортогонального дополнения $F^{\perp}$

$E = F \oplus F^{\perp}$

Примеры

1. Требуется найти базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$ подпространства L, натянутого на векторы

$$\bar{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix},\ \bar{a}_2=\begin{bmatrix}5\\8\\-2\\3\end{bmatrix},\ \bar{a}_3=\begin{bmatrix}3\\9\\3\\8\end{bmatrix}$$

Будем считать, что базис, относительно которого заданы векторы, ортонормированный. По определению, если $\bar{x}\in L$, то $\bar{x}=\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\lambda_3\bar{a}_3$. Далее, каждый вектор $\bar{y}$ из $L^{\perp}$ должен быть ортогонален к $\bar{x}$. Для этого достаточно, чтобы $(\bar{y},\bar{a}_i)=0 \quad i=\overline{1,3}$. Расписывая скалярные произведения, получим три уравнения относительно координат y_1, y_2, y_3, y_4 вектора $\bar{y}$

$$\begin{aligned}&y_1+y_2-y_3+2y_4=0\\&5y_1+y8_2-2y_3+3y_4=0\\&3y_1+9y_2+3y_3+8y_4=0\end{aligned}$$

Совокупность решений этой системы и образует ортогональное дополнение. За базис в $L^{\perp}$ можно принять любую фундаментальную систему решений. Например, вектор $[2,-1,1,0]^{T}$.

2. Линейное подпространство $F\subset E_4$ задано уравнениями

$$\begin{aligned}&2x_1-2x_2+x_3+2x_4=0\\&2x_1-4x_2+2x_3+3x_4=0\end{aligned}$$

Требуется найти уравнения, которые задают ортогональное дополнение $F^{\perp}$.

Пусть $\bar{x}\in F$, $\bar{y}\in F^{\perp}$. Тогда $(\bar{x},\bar{y})=0$. Этому условию удовлетворяют два линейно независимых вектора $[2,-2,1,2]^{T}$ и $[2,-4,2,3]^{T}$, которые образуют коэффициенты системы уравнений, задающей F. Далее, $\dim E_4=4$. Ранг системы равен 2. Значит $\dim F=2$ и, так как $E_4=F\oplus F^{\perp}$, то $\dim F^{\perp}=2$. Поэтому найденные векторы можно принять за базис в $F^{\perp}$, и $F^{\perp}$ есть линейная оболочка данных векторов. Далее задача решается так же как в примере из § 3. Дословно повторяя решение, получим следующую систему уравнений $\begin{aligned}&x_1-2x_3=0\\&x_2-2x_3+2x_4=0\end{aligned}$

которая и задает $F^{\perp}$.

Пусть $E_n=L\oplus L^{\perp}$. Тогда всякий вектор $\bar{x}\in E_n$ можно представить в виде $\bar{x}=\bar{g}+\bar{h}$, где $\bar{g}\in L$ и $\bar{h}\in L^{\perp}$. Вектор $\bar{g}$ называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство L, а вектор $\bar{h}$ называется ортогональной составляющей вектора $\bar{x}$.

Пусть $\bar{z}\in L$ и $\rho(\bar{x},\bar{y})$ — расстояние между векторами $\bar{x},\bar{y}$, тогда

$$\rho(\bar{x},\bar{y})=\inf_{\bar{z}\in L}\rho(\bar{x},\bar{z})$$

Таким образом, ортогональная проекция есть ближайший к $\bar{x}$ вектору подпространства L. Часто используются следующие обозначения $\bar{g} = \mathrm{pr}_L \bar{x}$, $\bar{h} = \mathrm{ort}_L \bar{x}$.

Укажем в заключение как вычисляются координаты вектора $\mathrm{pr}_L \bar{x}$. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., e_k$ — базис в L. Так как $\bar{h} \perp L$, то $\bar{h} \perp \bar{e}_i$. Поэтому $(\bar{x}, \bar{e}_i) = (\mathrm{pr}_L \bar{x} + \bar{h}, \bar{e}_i) = (\mathrm{pr}_L \bar{x}, \bar{e}_i)$

Отсюда имеем, что в случае ортонормированного базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., e_k$

$$\mathrm{pr}_L \bar{x} = \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}, \bar{e}_i) \bar{e}_i$$

Примеры

1. Найти ортогональную проекцию $\mathrm{pr}_L \bar{x}$ и ортогональную составляющую $\mathrm{ort}_L \bar{x}$ вектора $\bar{x}$ на линейное подпространство L, натянутое на векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_3$. Все векторы заданы координатами относительно ортонормированного базиса.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что $\dim L = 2$ и что за базис можно принять векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Нам будет удобно перейти к ортонормированному базису в L. Применяя процедуру ортогонализации к векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, получим ортонормированный базис в L: $\bar{e}_1 = \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$, $\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}[0, 1, 1, -2]^{\mathrm{T}}$

Заметьте, что векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ линейно выражаются через $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ и, значит, также принадлежат L. Имеем теперь

$$\mathrm{pr}_L \bar{x} = (\bar{x}, \bar{e}_1)\bar{e}_1 + (\bar{x}, \bar{e}_2)\bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{ort}_L \bar{x} = \bar{x} - \mathrm{pr}_L \bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Требуется найти расстояние от точки, заданной вектором $\bar{x} = [4, 2, -5, 1]^{\mathrm{T}}$ до плоскости (линейного многообразия), заданной системой уравнений

$$L: \begin{matrix} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{matrix}$$

Расстояние между точкой $\bar{x}$ и множеством L определится следующим образом $\rho(\bar{x}, L) = \min\limits_{\bar{y} \in L} \rho(\bar{x}, \bar{y})$

Для вычисления расстояния удобно перейти к параметрическому уравнению плоскости. Имеем $\dim L = 2$ и поэтому всякий вектор $\bar{y} \in L$ представляется в виде

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2$$

где $\bar{y}_0$ — фиксированный радиус-вектор точки плоскости; $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — базис направляющего линейного подпространства, которое задается соответствующей однородной системой. Решая уравнение, получим, например,

$$\bar{y}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Затем $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \|\bar{x} - \bar{y}_0 - \lambda_1 \bar{e}_1 - \lambda_2 \bar{e}_2\|$

Векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ принадлежат направляющему подпространству M плоскости L. Вектор $\bar{x} - \bar{y}_0 = \mathrm{pr}_M(\bar{x} - \bar{y}_0) + \mathrm{ort}_M(\bar{x} - \bar{y}_0)$. Так как $\mathrm{pr}_M(\bar{x} - \bar{y}_0) \in M$, а $\mathrm{ort}_M(\bar{x} - \bar{y}_0) \perp M$, то

$$\|\mathrm{pr}_M(\bar{x} - \bar{y}_0) - \lambda_1 \bar{e}_1 - \lambda_2 \bar{e}_2 + \mathrm{ort}_M(\bar{x} - \bar{y}_0)\| \geq \|\mathrm{ort}_M(\bar{x} - \bar{y}_0)\|$$

Правая часть этого неравенства и есть искомое расстояние. Осталось вычислить вектор $\mathrm{ort}_M(\bar{x} - \bar{y}_0)$ и найти его норму. Проделав для этого аналогичные вычисления и вычислив длину вектора, получим, что $\rho(\bar{x}, L) = \|\mathrm{orc}_M(\bar{x} - \bar{y}_0)\| = 5$.

3. Пусть $e_1, e_2, ..., e_k$ — ортонормированная система векторов евклидова пространства E$_n$. Нужно доказать, что для любого вектора $\bar{x} \in E_n$ имеет место неравенство Бесселя $\sum_{i=1}^{k} (\mathrm{pr}_{\bar{e}_i} \bar{x})^2 \leq \|\bar{x}\|^2$ с равенством тогда и только тогда, когда $k = n$, т.е. векторы $\{\bar{e}_i\}$ образуют ортонормированный базис в E$_n$.

Так как $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_k$ — ортонормированная система, то ее всегда можно векторами $\bar{e}_{k+1}, ..., \bar{e}_n$ достроить до ортонормированного базиса в E$_n$. Разложим вектор $\bar{x}$ по этому базису. Имеем

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + ... + x_n \bar{e}_n$$

$$x_i = (\bar{x}, \bar{e}_i) = \mathrm{pr}_{\bar{e}_i} \bar{x}$$

Далее, $\|\bar{x}\|^2 = (\bar{x}, \bar{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

или

$$\|\bar{x}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{pr}_{\bar{e}_i} \bar{x})^2$$

С равенством тогда и только тогда, когда $k = n$. Исключение составляют случаи, когда $\bar{x} = \bar{e}_i$ $(i = \overline{1,k})$ или когда $\bar{x}$ принадлежит линейной оболочке векторов $\bar{e}_i, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_k$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ: (REFERENCES)

1. Шарипова С. МАТЕМАТИКА В БИОЛОГИИ //Conferencea. – 2022. – С. 196-199.
2. Шарипова С. Ф., Олтмишев А. СОВРЕМЕННЫЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ. – 2022.
3. Sadoqat S. METHODS FOR SOLVING PARAMETRIC EQUATIONS AND INEQUALITIES //PEDAGOGS jurnali. – 2022. – Т. 10. – №. 2. – С. 210-221.
4. Fazliddinovna S. S., Rabimkul A. MATEMATIKA DARSLARIDA ZAMONAVIY TEXNOLOGIYALARNING QO ‘LLANILISHI VA UNING AHAMIYATI.
5. Xurshid Sharipov, & Sadoqat Sharipova. (2023). ORBITS ARE A FAMILY OF VECTOR FIELDS AND A HYPERBOLIC PARABOLOID. International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research, 1(2), 50–57. Retrieved from https://journal.jbnuu.uz/index.php/ijcstr/article/view/685
6. Sadoqat S. CHIZIQLI FAZODA TURLI BAZISLARDA VEKTOR KOORDINATALARI ORASIDAGI BOG‘LIQLIK //International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research. – 2023. – С. 336-340.
7. Шарипова, С. (2022). Matematika fanlarini oqitishda innovatsion va axborot texnologiyalaridan foydalanish. Современные инновационные исследования актуальные проблемы и развитие тенденции: решения и перспективы, 1(1), 352–355. извлечено от https://inlibrary.uz/index.php/zitdmrt/article/view/5090