ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИДА ПУАССОН ВА НОРМАЛ КОНУНЛАРИНИНГ КОМПОЗИЦИЯСИ ҲАҚИДА

И. Неъматов
Фарғона давлат университети математика
кафедраси доценти,

О. Ахмаджанова
Фарғона давлат университети математика
кафедраси ўқитувчиси

Kalit so‘zlar: ehtimollar nazaryasi, Puasson qonuni, tasodifiy miqdor, limit teorema, normal qonun, lokal limit teorema, qoldiq had bahosi

Ключевые слова: теория вероятностей, закон Пуассона, случайная величина, предельная теорема, нормальный закон, локальная предельная теорема, оценка остаточного члена

Key words: probability theory, Poisson’s law, random variable, limit theorem, normal law, local limit theorem, estimate of the remainder term.

Эҳтимоллар назариясида асосан дискрет ва узлуксиз қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорлар ҳамда уларнинг татбиқлари ўрганилади. Дискрет типдаги тасодифий миқдорга (т.м.) Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорни, узлуксиз типдаги тасодифий миқдорга нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорни келтириш мумкин.

1-таъриф. Агар ξ тасодифий миқдор, 0,1,2,... қийматларни $\lambda > 0$ учун

$$P\{\xi = k\} = p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \tag{1}$$

эҳтимоллик билан қабул қилса, уни Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор дейилади.

2-таъриф. ξ тасодифий миқдорнинг таксимот функцияси

$$\Phi_{(a,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \tag{2}$$

шаклда бўлса, бу тасодифий миқдорни нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор деб юритилади. (2) тақсимотдаги $a = M\xi$, $\sigma^2 = D\xi$ бўлади.

Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремаларида ўзаро боғлиқмас ва бир хил тақсимланган

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{3}$$

$$M\xi_i = a_i,\ D\xi_i = \sigma_i^2$$

$i = \overline{1, n}$, бўлган тасодифий миқдор кетма-кетлигидан

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \tag{4}$$

йиғинди тузилиб, $n \to \infty$ лимити ўрганилади.

Агар тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги етарлича катта сонда бўлса ва хар бир қўшилувчи тасодифий миқдорни (4) йиғиндига таъсири "жуда кичик" бўлса, у ҳолда (4) га мос тақсимотни $\lambda \to \infty$ даги лимити нормал қонун бўйича таксимланган тасодифий миқдорнинг таксимот функциясига интилади, яъни

$$F\{\zeta_n < x\} \to \Phi(x)$$

Агар $\nu(\lambda) = \nu,\ \lambda > 0$ бутун қийматларни кабул қилувчи тасодифий миқдор учун

$$Z_{\nu(\lambda)} = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\nu(\lambda)} \tag{5}$$

каби, индекси ҳам тасодиқий миқдор бўлган йиғиндига мос тасодифий миқдор $\lambda \to \infty$ даги лимити қаралса, (5) ни интилган лимити нормал қонунга интилмайди. Бунда (5) нинг интилган лимити Пуассон ва нормал қонунларнинг композициясига (боғламига) интилади. (5) га мос лимит теоремаларни "тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун лимит теоремалар" деб юритилади.

"Тасодифий индексли" қўшилувчилар учун лимит теоремалар ёки тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун лимит теоремалар соҳаси эҳтимоллар назаряси лимит теоремаларнинг катта бир бўлимидир.

Бу соҳанинг биринчи асосчиси Америка математиги Г.Роббинс [5] ҳисобланади. У йиғиндиларнинг сони тайинланган учун берилган эҳтимоллар назарясининг лимит теоремаларини 1946 йилда тасодифий йиғиндилар учун ўтказган.

Бундан у бир хил тақсимланган ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчиларни ўрганган.

Кейинчалик 1952-1955 йилларда Венгер математиги А.Ренъи, Г.Роббинс назарясини ўрганиб, давом эттириб, бу масалалар қолдиқ ҳаднинг баҳосини ўрганиш масалалари билан шуғулланган.

А.Ренъи текширишларида оддий лимит теоремалар билан тасодифий индексли қўшилувчилар учун берилган лимит теоремаларни таққослаган, биридан иккинчисига “ўтиш” механизмини келтириб чиқарган.

Бу масалалар 1961 йилдан бошлаб Ўзбекистон академиясининг академиги С.Х.Сирожиддинов ва унинг шогирдлари томонидан ўрганила бошлаган.

1966 йилда С.Х.Сирожиддинов ва Г.Оразовлар томонидан тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун интеграл теоремалар, локал лимит теоремалар, уларнинг қолдиқ ҳадлар баҳолари ўрганилади. С.Х.Сирожиддинов устознинг шогирдларидан С.В.Нагаев, Ш.К.Фармонов, М.Маматовлар шу соҳада бир нечта мақолалар эълон қилдилар.

И.Неъматов [6] бу масалаларни ҳар хил тақсимланган тасодифий сондаги тасодифий қўшилувчилар учун ўтказган.

$\nu=\nu(\lambda)$ - нинг сонли характеристикалари қуйидагича:

$P(\nu(\lambda)=k)=p_k,$

$$M\nu=\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k\,,$$

$$D\nu=\gamma^2=\sum_{k=1}^{\infty}(k-\alpha)^2p_k\,,$$

$$P\left\{\frac{\nu(\lambda)-M\nu(\lambda)}{D\nu(\lambda)}<x\right\}=\Theta_{\lambda}(x)$$

бўлади.

(5) нинг тақсимоти:

$$P\{Z_{\nu(\lambda)}<x\}\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}\Theta\left(\frac{x}{\delta}\right)*\left(\frac{x}{1-\delta^2}\right)$$

каби бўлади, бу ерда

$$\delta=a\gamma/\sigma,\quad \sigma_1=\alpha\sigma^2+a^2\gamma^2$$

$\Theta\left(\frac{x}{\delta}\right)*\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)$ - таксимот функция иккита тақсимот функцияларнинг композициясидан иборат: биринчиси дискрет қонун бўйича таксимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси, икинчиси нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг таксимот функциясидир. Уларнинг композицияси [2] га асосан узлуксиздир.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙҲАТИ: (REFERENCES)

[1] Г.Роббинс. Asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. Bull. Of Amer. Mfth. Sok. 511, № 12.ю 1948, 1151-1161.;

[2]. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т.1. т.2. Мир. 1967.

[3] С.Х.Сирожиддинов, Г.Оразов. Обобщение одной теоремы. Г. Роббинса. Пред теоремы. 1965 Ташкент.

[4] И.Неъматов. Кандидатская диссертация. – Т.: 1975

[5] H. Robbins. On the asymptotic dictribution of the sun of a random variables Bull of Amer. Math. Sok. 54 № 12. 1948 y.

[6] И.Неъматов Кандидатская диссертация. Тошкент, 1975 й.