CHEGARAVIY SHARTLI IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHNING GALYORKIN USULI

Abdujalilov Sodiqjon Muhammadamin o‘g‘li
Stajyor o‘qituvchi, Namangan muhandislik-qurilish instituti, Namangan shahri.
sodiq.abdujalilov1992@gmail.com

Parpiyev Sanjarbek Po‘lat o‘g‘li
Magistrant, Namangan muhandislik-qurilish instituti, Namangan shahri.
sanjarbekparpiyev5@gmail.com

ANNOTATSIYA

Bizga ma’lumki taqribiy - analitik gurhiga kiruvchi ko‘plab usullar mavjud. Ushbu usullardan biri Galyorkin usuli. Galyorkin usulidan fizika va mexanika masalarining taqribiy - analitik yechimlarini topish uchun foydalanamiz. Chegaraviy shartli ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni taqribiy - analitik yechimini topish imkoniga ega bo‘lamiz.

Kalit so‘zlar: boshlang‘ich shart, chegaraviy shart, bazis funksiya, tafovutlik funksiyasi.

Galyorkin usuli taqribiy-analitik usullar guruhiga kiradi. Mazkur usullar guruhi tarkibiga kiruvchi barcha usullarda berilgan differensial tenglamaning yechimi taqribiy aniqlangan formulalar yordamida topiladi va albatta, yechim ham analitik ko‘rinishda ifodalanadi. Ayniqsa, ko‘pgina fizika va mexanika masalalarining yechimini analitik ko‘rinishda qidirish lozimligi, taqribiy analitik usullarni o‘rganishga katta ehtiyoj tug‘diradi.

Deyarli barcha taqribiy-analitik usullarning algoritmlari bir-biriga o‘xshash bo‘lgani uchun quyida Galyorkin usulini o‘rganish bilan cheklanamiz.

Bizga quyidagi chegaraviy masala berilgan bo‘lsin, ya`ni:

$$y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+q(x)\cdot y(x)=f(x) \qquad (1)$$

tenglama va

$$\begin{cases} m_0 y(a)+m_1 y'(a)=m_2 \\ g_0 y(b)+g_1 y'(b)=g_2 \end{cases} \qquad (2)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimni topish kerak.

Ma`lumki, ixtiyoriy uzluksiz funksiyani cheksiz qator ko‘rinishida ifodalash mumkin:

$$y(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x)$$

Galyorkin usulida ushbu qatordagi “n” ta chekli xad bilan chegaralanib, chegaraviy masalaning yechimini quyidagi ko‘rinishda qidirish taklif etiladi:

$$y(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (3)$$

Bu yerda shuni eslatib o‘tish lozimki, Galyorkin usulida yo‘l qo‘yilgan yagona va asosiy xatolik cheksiz hadli qatorni chekli hadli qatorga almashtirishdan iboratdir. Qatordagi hadlar sonini qancha ko‘p olsak, shunchalik olingan natijalar ishonchli va aniq yechimga yaqin bo‘ladi. Lekin, ikkinchi tomondan, qatordan ko‘proq had olishga intilish qo‘lda bajariladigan matematik almashtirishlar va amallar sonini keskin orttirib yuboradi. Bu esa yo‘l qo‘yilishi mumkin bo‘lgan xatoliklar ehtimolini keskin orttiradi.

Endi e`tiborimizni yana yechimni qidirishga qaratsak, (3) formuladagi $c_1, c_2, \ldots c_n$ -lar qiymatlari noma`lum bo‘lgan o‘zgarmaslar hisoblanadi. $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ lar esa tanlab olinadigan [a, b] kesmada ikki marta uzluksiz differensallanuvchi, chiziqli bog‘liq bo‘lmagan funksiyalar hisoblanadi, ya`ni ular bazis sistemasini tashkil qilishi kerak.

Bazis funksiyalarni shunday tanlash lozimki, (3) formula bilan aniqlanuvchi masalaning yechimi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ o‘zgarmaslarning ixtiyoriy tanlangan qiymatlarida ham chegaraviy masalaning (2) chegaraviy shartlarini qanoatlantirsin. Buning uchun bazis funksiyalarni tanlash quyidagicha amalga oshiriladi.

Avval quyidagi operatorlarni muomalaga kiritaylik:

$$L[y(x)] \equiv y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x),$$
$$L_a[y(x)] \equiv m_0 y(x)+m_1 y'(x)$$
$$L_b[y(x)] \equiv g_0 y(x)+g_1 y'(x)$$

1) $u_0(x)$ funksiya – berilgan (2) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi funksiya bo‘lishi lozim, ya`ni:

$$\begin{cases} m_0 u_0(a)+m_1 u`_0(a)=m_2 \\ g_0 u_0(b)+g_1 u`_0(b)=g_2 \end{cases}, \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} L_a[u_0(a)]=m_2 \\ L_b[u_0(b)]=g_2 \end{cases}.$$

2) $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ funksiyalari esa berilgan (2) chegaraviy shartning bir jinsli holatini qanoatlantiruvchi funksiyalar bo‘lishi lozim, ya`ni:

$$\begin{cases} m_0 u_i(a)+m_1 u_i^`(a)=0 \\ g_0 u_i(b)+g_1 u_i^`(b)=0 \end{cases}, \quad i=\overline{1,n} \ \text{yoki} \quad \begin{cases} L_a[u_i(a)]=0 \\ L_b[u_i(b)]=0 \end{cases}$$

Bazis funksiyalarni tanlash yo‘llarini quyidagi misolda ko‘rib chiqaylik:

Chegaraviy masalaning chegaraviy shartlari quyidagicha berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

$u_0(x)$ ni shunday tanlaymizki, $u_0(0)=1,\quad u_0(1)=0$, ya`ni berilgan chegaraviy shart qanoatlansin:

$$u_0(x)=1-x$$

Xuddi shunga o‘xshash, boshqa bazis funksiyalar $u_k(x)$lar esa bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi va chiziqli bog‘liqsiz bo‘lishi kerak.

$$\begin{cases} u_1(0)=0 \\ u_1(1)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u_1(x)=x(1-x)$$

$$\begin{cases} u_2(0)=0 \\ u_2(1)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u_2(x)=x^2(1-x)$$

Biz $u_0(x), u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ bazis funksiyalarni tanlashni o‘rgandik, endi chegaraviy masalaning yechimi faqat $c_1, c_2, ..., c_n$ noma`lum koeffisientlarga bog‘liq bo‘lib qoldi. Galyorkin, Rits, kollokasiya, eng kichik kvadratlar kabi boshqa taqribiy-analitik usullar bir-biri bilan aynan shu noma`lum koeffisientlarni aniqlash yo‘llarini turlichaligi bilan o‘zaro farq qiladi holos. Bu o‘zgarmaslarni Galyorkin taklif etgan usul bilan aniqlashni tashkil qilamiz. Buning uchun, dastlab (3) formulani (1) differensial tenglamaga qo‘yib, quyidagi tafovut funksiyasini hosil qilamiz:

$$R(x, c_1, c_2, ..., c_n) = L[u_0(x)] + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot L[u_k(x)] - f(x) \qquad (4)$$

Bu funksiya chegaraviy masala taqribiy yechimining aniq yechimdan farqini xarakterlovchi miqdor bo‘lib, u $c_1, c_2, ..., c_n$ o‘zgarmaslarga chiziqli bog‘liqdir.

Tafovut funksiyani minimallashtirish sharti Galyorkin usulida quyidagicha ifodalanadi.

$$\begin{cases} \int_a^b R(x, c_1, c_2, ..., c_n) \cdot u_1(x) \cdot dx = 0 \\ \int_a^b R(x, c_1, c_2, ..., c_n) \cdot u_2(x) \cdot dx = 0 \\ \int_a^b R(x, c_1, c_2, ..., c_n) \cdot u_n(x) \cdot dx = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Yani, tafovut funksiyani $u_i(x),\ (i=\overline{1,n})$ bazis funksiyalarga ortogonallik shartidan foydalaniladi.

(4) formuladagi R –tafovut funksiyasini (5) sistemaga qo‘yamiz.

$$\begin{cases} \int_a^b (L[u_0]+c_1\cdot L[u_1]+c_2\cdot L[u_2]+...+c_n\cdot L[u_n]-f(x))\cdot u_1(x)\cdot dx=0 \\ \int_a^b (L[u_0]+c_1\cdot L[u_1]+c_2\cdot L[u_2]+...+c_n\cdot L[u_n]-f(x))\cdot u_2(x)\cdot dx=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_a^b (L[u_0]+c_1\cdot L[u_1]+c_2\cdot L[u_2]+...+c_n\cdot L[u_n]-f(x))\cdot u_n(x)\cdot dx=0 \end{cases} \quad (6)$$

Natijada $c_1,c_2,....,c_n$ noma`lumlarga nisbatan (6) ko‘rinishidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Uning koeffisientlarini yuqoridagi aniq integrallarni hisoblash yordamida topiladi. Sistemani yechib (odatda Gauss usulidan foydalaniladi) $c_1,c_2,....,c_n$ noma`lum o‘zgarmaslarni aniqlash mumkin. U holda chegaraviy masalaning taqribiy analitik yechimini

$$y(x)=u_0(x)+c_1\cdot u_1(x)+c_2\cdot u_2(x)+...+c_n\cdot u_n(x) \qquad (7)$$

ko‘rinishida yoza olamiz.

Chegaraviy masalaning differensial tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$y''-2y'+x^3\cdot y=12x^2-8x^3+x^7$$

Differensial tenglamaning yechimiga qo‘yilgan chegaraviy shartlar esa:

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$$

Yuqorida ta`kidlaganimizdek, Galyorkin usuli bilan ishlashdan oldin berilgan masalaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiradigan bazis funksiyalarni tanlab olishimiz lozim:

1) $u_0(x)$ ni berilgan chegaraviy shart, ya`ni $u_0(0)=0$ va $u_0(1)=1$ shartni qanoatlantiradigan qilib, quyidagicha tanlab olamiz: $u_0(x)=x$.

2) $u_1(x)$ va $u_2(x)$ larni esa berilgan chegaraviy shartga mos bir jinsli shartlarni, ya`ni $u_1(0)=0, u_1(1)=0$ va $u_2(0)=0$, $u_2(1)=0$ shartni qanoatlantiradigan va o‘zaro chiziqli bog‘liqsiz qilib, quyidagicha tanlab olamiz:

$$u_1(x)=x(x-1)=x^2-x; \qquad u_2(x)=x^2(x-1)=x^3-x^2.$$

Endi (4) formula orqali $c_1,c_2,....,c_n$ larni aniqlaymiz. Bazis funksiyalarni (5) sistemasiga qo‘yamiz. (6) sistemani hosil qilamiz. Sistemani yechib (7) formula orqali chegaraviy masalani taqribiy analitik yechimini topamiz.

Natija:

x	y
x[0]=0.1	y[0]=0.00533333
x[1]=0.2	y[1]=0.0226667
x[2]=0.3	y[2]=0.054
x[3]=0.4	y[3]=0.101333
x[4]=0.5	y[4]=0.166667
x[5]=0.6	y[5]=0.252
x[6]=0.7	y[6]=0.359333
x[7]=0.8	y[7]=0.490667
x[8]=0.9	y[8]=0.648
x[9]=1	y[9]=0.833333

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. S.S.Irisqulov, K.D. Ismanova, M. Olimov, A. Imomov. Sonli usullar va algoritmlar. – N.: "Namangan" nashriyoti, 2013, 244 b.
2. S.Parpiyev, S. Adujalilov «MODELS AND METHODS FOR INCREASING THE EFFICIENCY OF INNOVATIVE RESEARCH» elektron jurnalining 2021 yil fevralida soni. https://doi.org/10.5281/zenodo.6011643.
3. S.Parpiyev, S. Adujalilov. "INTERNATIONAL CONFERENCE ON INNOVATIVE DEVELOPMENT OF EDUCATION 2022/2". http://erus.uz/index.php/ic/article/view/94
4. Олимов М., Парпиев С., "Численные решения прикладных задач пространственных стержней"; «Amaliy matematika Vaaxboro texnologiyalarining Zamonaviy muammolari» Xalqaro ilmiy-amaliy anjuman Materiallari, 11-12 may, 2022 yil, Buxoro.
5. Solutions Of Boundary-Value Problems For A System Of Differential Equations Of The Fourth Order With The Method Of Finite Differences, Turkish Journal of Computer and Mathematics Education Vol.12 No.10 (2021), 2209-2213.
6. Problems of Development and Solution of Technological Processes of Cleaning Cotton with Small PJAEE, 17 (7) (2020) Dispersion Particles and Dust.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.