KOMPLEKS SONLAR USTIDA AMALLAR BAJARISH

Xo‘jayeva Nargiza Abdusharipovna
UrDU akademik litseyi aniq fanlar kafedrasi
matematika fani o‘qituvchisi

Bekchanova Feruza Xodjinazarovna
UrDU akademik litseyi aniq fanlar kafedrasi
matematika fani o‘qituvchisi

Sa’dullayev Ne’matjon Shavkatovich
UrDU akademik litseyi aniq fanlar kafedrasi
matematika fani o‘qituvchisi

ANNOTATSIYA

Matematika fanlarda kompleks sonlar bilan ishlash ba’zi talabalar uchun qiyinchilik tug‘diradi. Kompleks sonlar mavzusini puxta o‘zlashtirish o‘quvchilardan keng dunyoqarash va fikrlash talab qiladi. Matematika darslarida murakkab mavzularda misol va masalalar yechish o‘quvchilarning iqtidorini, mantiqiy fikrlashini va kreativ qobiliyatini rivojlantiradi. Ushbu maqolada matematika darslarida kompleks ustida arifmetik amallar bajarish bo‘yicha batafsil ma’lumot berilgan va misollar orqali tushuntirilgan.

Kalit so‘zlar: kompleks son, haqiqiy son, geometrik tasvir, trigonometrik shakl, algebraik shakl.

KIRISH

Haqiqiy sonlar bilan ish ko‘rilganda noldan farqli har qanday haqiqiy sonni kvadrati musbat bo‘ladi deyilgan edi. Ammo kvadrati manfiy bo‘lgan sonlar bilan ham ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bunday sonlar tabiiyki haqiqiy son bo‘lmaydi.

●a + ib ko ‘rinishdagi ifoda (bu yerda a va b - haqiqiy sonlar, i — mavhum birlik) **kompleks son** deyiladi. a soni kompleks sonning haqiqiy qismi, bi esa uning mavhum qismi deyilib, quyidagicha belgilanadi:

Re(a + ib) = a, Im(a + bi) = bi.

Bu yerda Re belgisi fransuzcha realle — haqiqiy so‘zining birinchi bo‘g‘ini, Im ham fransuzcha imaginail — mavhum sozining birinchi bo‘g‘ini.

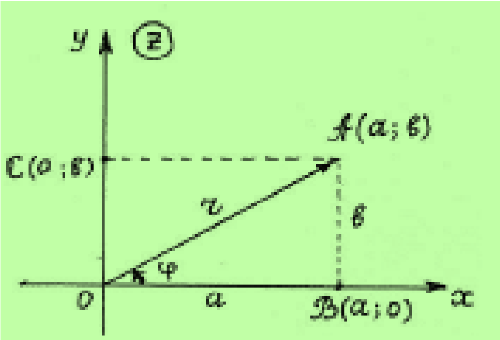
●Ikkita a+ ib va c + di kompleks sonlar faqat va faqatgina a = c va b = d bo‘lgandagina **bir-biriga teng** deyiladi.

• a+ib va a - ib ko‘rinishdagi komplek sonlar o‘**zaro qo‘shma kompleks sonlar** deyiladi.

•-a-bi soni a +ib soniga **qarama-qarshi son** deyiladi.[1]

Kompleks sonning geometrik tasviri:

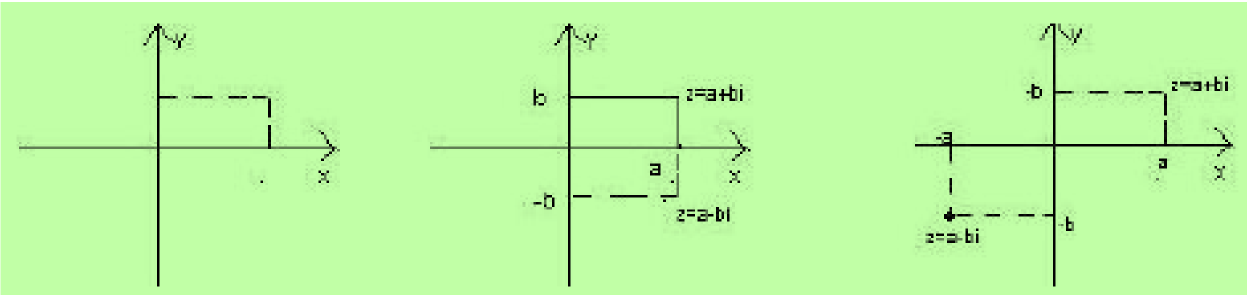
Har qanday z=a+ib kompleks sonni OXY tekislikda koordinatalari a va b bo‘lgan A (a,b) nuqta shaklida tasvirlash mumkin. Aksincha, OXY tekislikdagi har qanday A(a,b) nuqtaga z=a+ib kompleks son mos keladi.. Kompleks sonlar tasvirlanadigan tekislik z kompleks o‘zgaruvchining tekisligi deyiladi va tekislikka doiracha ichiga z qo‘yiladi. (1-chizma).Shunday qilib kompleks sonning geometrik tasviri tekislikning nuqtasidan iborat ekan. OX o‘q haqiqiy oq, OY o‘q mavhum o‘q deb ataladi.



1-chizma

Kompleks sonni geometrik shaklidan va yuqoridagi ta’riflardan foydalanib

quyidagi fikrlarni keltirishimiz mumkin. Sof mavhum sonlar, **z=0+ib** mavhum o‘qda, haqiqiy sonlar z=a haqiqiy o‘qda belgilanadi. O‘zaro qo‘shma z=a+ib va z=a-ib kompleks sonlar, haqiqiy sonlar o‘qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi. Qarama - qarshi kompleks sonlar koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi.



2-chizma

Kompleks sonning trigonometrik shakli.

Koordinatalar boshini qutb, OX o‘qning musbat yo‘nalishini qutb o‘qi deb

kompleks tekislikda qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz. φ va r A(a,b)

nuqtaning qutb koordinatalari bo‘lsin. A nuqtaning qutb radiusi r, ya’ni A nuqtadan qutbgacha bo‘lgan masofa z=a+bi kompleks sonning **moduli** deyiladi va **|z|** kabi belgilanadi. A nuqtaning qutb burchagi φ ni z kompleks sonning argumenti deyiladi va Argz kabi belgilanadi. Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog‘lanish a=rcos φ , b=rsin φ ni hisobga olib

z=a+bi=rcos φ +irsin φ yoki z=r(cos φ +i sin φ) (1)

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikning o‘ng tomonidagi ifoda z=a+bi kompleks sonning **trigonometrik shakldagi yozuvi** deb ataladi

Qutb burchagi $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ kabi topilishi ma’lum. $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ argumentni hisoblashda z kompleks sonning koordinatalar tekisligining qaysi choragida yotishini hisobga olish kerak, chunki $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ qiymatga φ argumentning ikkita qiymatlari mos keladi. Shuning uchun

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & \text{agar } a > o, \quad b > o \quad \text{bo'lsa,} \\ \pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & \text{agar } a < 0 \ \ b \ \ \text{istalgan son bo'lsa,} \\ 2\pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & \text{agar } a > 0, \quad b < 0 \ \ \text{bo'lsa} \end{cases}$$

tenglikdan foydalanish kerak. Masalan, $\arg(1+i) = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$, chunki a=1>0, b=1>0,

$\arg(1-i) = \pi + \mathrm{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, chunki a=-1<0, b=1>0,

$\arg(-1-i) = \pi + \mathrm{arctg}(1) = \frac{5\pi}{4}$, a= -1<0, b=-1<0,

$\arg(1-i) = 2\pi + \mathrm{arctg}(-1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$, chunki, a=1>0, b= -1<0

Kompleks sonning z=a+bi ko‘rinishdagi yozuvi kompleks sonning **algebraik** shakli deyiladi. Kompleks son vektor shaklida tasvirlanganda haqiqiy songa OX o‘qda yotuvchi vektor, sof mavhum songa OY o‘qda yotuvchi vektor mos keladi.

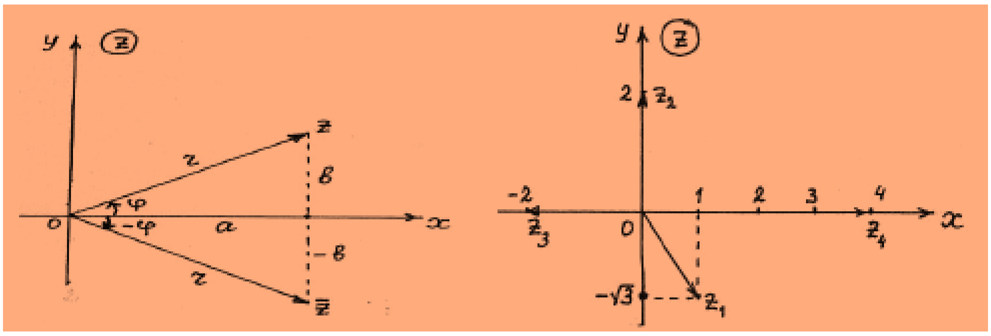
1-misol. z=a+bi va z =a-ib qo‘shma kompleks sonlar bir xil modullarga ega va argumentlarining absolyut qiymatlari teng, ishoralari qarama-qarshi ekanligini ko‘rsating.

Yechish. 2-chizmadan $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ va $|\bar{z}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ekani, ya’ni $|z| = |\bar{z}|$ va argz= -arg z ekani kelib chiqadi.

Izoh: Har qanday haqiqiy A sonni ham trigonometrik shaklda yozish mumkin, Ya’ni A>0 bo‘lsa,

A=A(cos o+isin o), (2)

A<0 bo‘lsa, $A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi)$ tenglik o‘rinlidir.



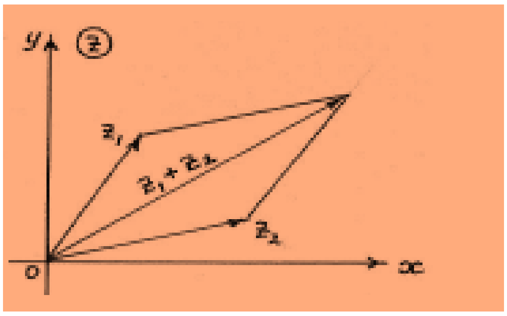
3-chizma

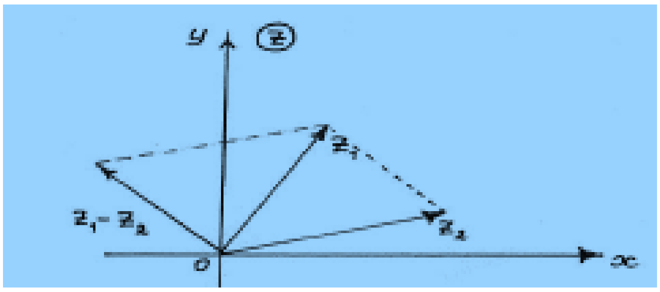
KOMPLEKS SONLAR USTIDA ASOSIY AMALLAR.

Kompleks sonlarni qo‘shish. Ikkita $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks sonlarning yig‘indisi deb

$$\mathbf{z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \quad \mathbf{(3)}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi kompleks songa aytiladi. (3) formuladan vektor bilan tasvirlangan kompleks sonlarni qo‘shish-vektorlarni qo‘shish qoidasiga muvofiq bajarilishi kelib chiqadi. (4-chizma)





4-chizma 5-chizma

Kompleks sonlarni ayirish. Ikkita $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks sonlarning ayirmasi deb shunday kompleks songa aytiladiki, unga z_2 kompleks sonni qo‘shganda $z_1$ompleks son hosil bo‘ladi (5-chizma).

$$\mathbf{z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)} \quad \mathbf{(4)}$$

Ikki kompleks son ayirmasining moduli shu sonlarni Z tekisligida tasvirlovchi $A(a_1; b_1)$ va $A(a_2; b_2)$ nuqtalar orasidagi masofaga teng:

$$\mathbf{|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}} \quad \mathbf{(5)}$$

2-misol. z_1=3+2i va z_2=2-i kompleks sonlarning yig‘indisi va ayirmasini toping.

Yechish. z_1+ z_2=(3+2i)+(2-i)=(3+2)+ i(2-1)=5+i,

z_1- z_2=(3+2i)-(2-i)=(3-2)+i(2-(-1))=1+3i.

Kompleks sonlarni ko‘paytirish. $z_1=a_1+ib_1$ va $z_2=a_2+ib_2$ kompleks sonlarning ko‘paytmasi deb, $i^2=-1$ ekanligini hisobga olib bu sonlarni ikki had sifatida ko‘paytirish qoidasi bo‘yicha ko‘paytirish natijasida hosil bo‘lgan

$$\mathbf{z_1 * z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)} \quad \mathbf{(6)}$$

kompleks songa aytiladi.

z1 va z2 kompleks sonlar trigonometrik shakldа berilgan bo‘lsin:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Shu kompleks sonlarning ko‘paytmasinin topamiz:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 \cdot r_2[\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2] = r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)] = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Shunday qilib, $\mathbf{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]}$, **(7)**

ya’ni ikkita kompleks sonlar ko‘paytirnilganda ularning modullari ko‘paytiriladi, argumentlari esa qo‘shiladi.

3-misol. $z_1 = 3 - i$ va $z_2 = 3 - i$ kompleks sonlarning ko‘paymasini topilsin.

Yechish: $z_1 \cdot z_2 = (3 - i)(4 + 2i) = 12 + 6i - 4i - 2i^2 = 14 + 2i$

Kompleks sonlarni bo‘lish: $z_1=a_1+ib_1$ va $z_2=a_2+ib_2$ $(a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$ kompleks sonlarning bo‘linmasi deb z_2 son bilan ko‘paytmasi z_1 ga teng $z=x+iy$ kompleks songa aytiladi. Demak, $z = \frac{z_1}{z_2}$ va $z_1 = z \cdot z_2$ tengliklar teng kuchlidir.

Kompleks sonni kompleks songa bo‘lish amali bo‘linuvchi va bo‘luvchini bo‘luvchining qo‘shmasiga ko‘paytirish natijasida amalga oshiriladi.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$$

Agar kompleks sonlar $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ trigonometrik shaklda berilgan bo‘lsa, u holda:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_{1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_{2)}\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)]}{r_2(\cos^2\varphi_2 - (i\sin\varphi_2)^2)} =$$

$$= \frac{r_1[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Shunday qilib, $\mathbf{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]}$. **(8)**

ya’ni ikkita trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni bo‘lishda bo‘linuvchining moduli bo‘luvchining moduliga bo‘linadi, bo‘linuvchining argumentidan bo‘linuvchining argumenti ayriladi.

4-misol: $z_1 = 3 - 2i$ kompleks son $z_2 = 4 + i$ songa bo‘linsin

Yechish: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{4+i} = \frac{(3-2i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{3\cdot4-2-i(2\cdot4+3\cdot1)}{4^2+1^2} = \frac{10-i\cdot11}{17} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17}i$

Yuqoridagilardan kelib chiqib quyidagicha xulosa qilishimiz mumkin.

Kompleks sonlarni qo‘shish va ayirishda ularning algebraik shakldagi, [3,4,5] yozuvdagi formulalardan, ko‘paytirish va bo‘lishda trigonometrik shakldagi [7,8] formulalardan foydalanish maqsadga muvofiq.

XULOSA

XXI asr katta oʻzgarishlarga boy davr boʻlmoqda. Taraqqiyot oʻz ortidan ta’limni ergashtirib, oʻziga yanada katta e’tibor talab etmoqda. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining “Yangi Oʻzbekiston – maktab ostonasidan, ta’lim-tarbiya tizimidan boshlanadi”, degan gʻoyasi asosida keng koʻlamli islohotlar amalga oshirilmoqda. Ushbu islohotlarni amalga oshirish pedagoglar oldiga bir qator vazifalar va majburiyatlar qoʻyadi. Jumladan, bugungi kun oʻquvchilarni zamonaviy dasturlash tillariga oʻrgatishda turli uslublardan foydalanish[5], maktab oʻquvchilarining intellektual salohiyatiga mos boʻlgan darsliklarni yaratish [6], har bir yangi mavzu, boʻlim uchun terminologik lugʻatlar yaratish [7] orqali oʻquvchilarning yanada sifatli ta’lim olishiga erishish mumkin. Shuningdek matematika fanini yanada chuqurroq oʻrganish uchun masala yechish darslarini zamonaviy usullarda olib borish dolzarb vazifalardan biridir [4].

Ushbu maqolada matematika fanidagi eng dolzarb mavzulardan biri boʻlgan “Kompleks sonlar va ular ustida amallar bajarish” mavzusi boyicha nazariy ma’lumotlar keltirilgan. Maqolada kompleks sonlar haqida tushuncha, ularning ta’riflari, trigonometrik va algebraik shakllari haqida nazariy ma’lumotlar keltirilgan. Shuningdek kompleks sonlar ustida amalllar bajarish misollar orqali tushuntirilgan.

Ushbu maqoladan foydalanilgan holda kompleks sonlar mavzusini puxta va oson oʻzlashtirish mumkin deb hisoblaymiz va uni ta’lim jarayoniga tadbiq etish samarali natijalar berishiga ishonamiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR ROʻYXATI: (REFERENCES)

1. Matematika I. I. qism. Kasb–hunar kollejlari uchun oquv qollanma. A. Meliqulov. P. Qurbonov, P. Ismoilov //Toshkent:“0qituvchi” NMIU. – 2014.

2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – Рипол Классик, 1953.

3. Соатов Ё. У. Олий математика 1-жилд //Тошкент,«Ўқитувчи. – 1996.

4. Xodjinazarovna B. F. et al. MATEMATIKA DARSLARIDA OʻQUVCHILARNING MASALA YECHISH QOBILIYATINI RIVOJLANTIRISH //ОБРАЗОВАНИЕ НАУКА И ИННОВАЦИОННЫЕ ИДЕИ В МИРЕ. – 2023. – Т. 17. – №. 2. – С. 35-38.

5. Khodjinazarovna B. F., Kamaliddinovich S. A., Beknazarovna S. S. VISUALIZING THE SOLAR SYSTEM USING PYTHON AND ITS IMPORTANCE IN

EDUCATION //International journal of advanced research in education, technology and management. – 2023. – T. 2. – №. 6.

6. Akhmedovich K. M., Beknazarovna S. S. METHODS OF CHECKING THE GIVEN LITERATURE ON THE INTELLECTUAL POTENTIAL OF SCHOOLCHILDREN.

7. Sattarova S. B., Bekchanova F. X., Shermetov A. K. TERMINOLOGIK LUG‘AT YARATISH TEXNOLOGIYASI VA UNING TA’LIM TIZIMIDAGI AHAMIYATI //Academic research in educational sciences. – 2023. – T. 4. – №. 5. – C. 422-434.