FUNKSIONAL TENGLAMA TUSHUNCHASI VA UNI YECHISHNING SODDA USULLARI

Ubaydulloyev Alisher Nematilloyevich
Saylixonov Shoxabbos Obidjon o‘g‘li
Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti

https://doi.org/10.5281/zenodo.10835055

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolda funksional tenglamalar yechishning muhim xossalari nazariy o‘rganish hamda ular asosida uning yechish usullari qisqacha tushuntirib o‘tilgan. Maqolaning mazmun funksional tenglamalarni soda usullardan foydalanib yechishdan iborat. Maqolaning asosiy maqsadi funksional tenglamalarni turli usullarda yechish asosida uning muhim nazariy xossalarini o‘rganishdan iborat.

Kalit so‘zlar. *Funksional, tenglama, to‘plam, o‘zgruvchi, kesma, chegara, uzluksiz, ekvivalent.*

АННОТАЦИЯ

В этой статье кратко объясняются основные свойства решения функциональных уравнений как теоретическое исследование, так и методы его решения на их основе. Содержание статьи заключается в решении функциональных уравнений с помощью содовых методов. Основная цель статьи-изучение важных теоретических свойств функциональных уравнений на основе их решения различными способами.

Ключевые слова. *Функциональный, уравнение, множество, переменная, пересечение, предел, непрерывный, эквивалентный.*

ANNOTATION

This article briefly explains the basic properties of solving functional equations as a theoretical study and methods of solving it based on them. The content of the article is to solve functional equations using soda methods. The main purpose of the *article is to study important theoretical properties of functional equations based on their solution in various ways.*

Keywords. *Functional, equation, set, variable, intersection, limit, continuous, equivalent.*

Funksiyalardan tashkil topgan to‘plamga funksional to‘plam deyiladi. $[a,b]$ kesmada aniqlangan barcha uzluksiz funksiyalar to‘plami, $[a,b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar to‘plami funksional to‘plamlarga misol bo‘la oladi. Agar funksional to‘plamda berilgan tenglamada noma’lum funksiyadan iborat bo‘lsa bu tenglamaga funksional tenglama deyiladi.

Quyidagi tenglamalar funksional tenglamalarga eng sodda misollar bo‘la oladi:

$f(x) = f(-x)$ – juftlik tenglamasi;

$f(x+T) = f(x)$ – davriylik tenglamasi;

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ – additivlik tenglamasi va boshqalar.

Agar biror $f(\cdot)$ funksiya o‘z aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida funksional tenglamani qanoatlantirsa, u holda $f(\cdot)$ funksiya berilgan funksional tenglamaning yechimi deyiladi. Masalan, $f(x) = ax^2$, $f(x) = \sin 2\pi x$, $f(x) = ax,\ a \in R$ funksiyalar mos ravishda yuqoridagi funksional tenglamalarning xususiy yechimlarini tashkil etadi. Bunga berilgan funksiyani mos funksional tenglamada o‘rniga qo‘yish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

Funksional tenglamani yechish– avvalo bu tenglama yechimga ega yoki ega emasligini aniqlash, agar ega bo‘lsa uni topish demakdir.

Yechimni izlash jarayoni qo‘yilgan masalaga hamda izlanayotgan funksiya qanoatlantirishi kerak bo‘lgan chegaraviy shartlarga (monotonlik, uzluksizlik, differensiallanuvchanlik va hokazo) qarab aniqlanadi. Masalan,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

tenglamada izlanayotgan funksiya uzluksiz bo‘lishi talab qilinsa (ya’ni, tenglama uzluksiz funksiyalar to‘plamida berilgan bo‘lsa), u holda berilgan tenglama $f(x) = ax$

yagona yechimga ega, agar uzluksizlik sharti talab qilinmasa, u holda bu tenglamani qanoatlantiruvchi uzulishga ega funksiya ham topiladi.

Shuni alohida ta'kidlab o'tish joizki, funksiyaning ko'plab xossalarini u qanoatlantiradigan tenglamani o'rganish orqali aniqlanash mumkin.

Demak, noma'lum sonlar o'rnida noma'lum funksiyalar qatnashgan tenglamalar funksional tenglamalar deyilar ekan. Ma'lum shartni qanoatlantirishini bilgan holda noma'lum funksiyani qanday topish mumkinligini tekshirishga harakat qilamiz.

Bir o'zgaruvchili funksional tenglamalar odatda osongina yechiladi. Funksional tenglamalarni yechishning aniq metodlari bo'lmasada ayrim tiplari bor.

$\boldsymbol{O'zgaruvchilarni\ almashtirish}$. Bu funksional tenglamalarni yechishning eng umumiy yo'llaridan biri. Bu usulni qo'llaganda bir o'zgaruvchini boshqasi bilan almashtiramiz (dastlabki o'zgaruvchining aniqlanish sohasi ikkinchisiga ta'sir qilmasligi kerak), yangi funksional tenglama hosil bo'ladi. Ba'zan bu noma'lum funksiyani topishni osonlashtiradi.

$\boldsymbol{1-misol}$. Agar $f(x+7)=x^2-5x+2$ bo'lsa, $f(x)$ ni toping.

$\boldsymbol{Yechish}$. $t=x+7$ belgilash kiritamiz, u holda $x=t-7$. Buni berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$f(t)=(t-7)^2+5(t-7)+2=t^2-9t+16.$$

Shunday qilib, $f(x)=x^2-9x+16$.

$\boldsymbol{Javob}$: $f(x)=x^2-9x+16$.

$\boldsymbol{2-misol}$. Agar $f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+1}{x}+\frac{1}{x}$ bo'lsa, $f(x)$ ni toping.

$\boldsymbol{Yechish}$. $t=\frac{x+1}{x}$ belgilash kiritib , bundan $x=\frac{1}{t-1}$ ni topamiz. Berilgan tenglama o'rniga qo'ysak,

$$f(t)=\frac{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2}+\frac{1}{\frac{1}{t-1}}=(\frac{1}{(t-1)^2}+1+\frac{1}{t-1})(t-1)^2=$$

$$=1+(t-1)^2+t-1=t^2-t+1.$$

Bundan $f(x)=x^2-x+1$.

$\boldsymbol{Javob}$: $f(x) = x^2 - x + 1$.

$\boldsymbol{3 - misol}$. Agar $(lnx) = x^2 + x + 1$, $x > 0$ bo‘lsa, $f(x)$ ni toping.

$\boldsymbol{Yechish}$. $t = lnx$ belgilash kiritsak, $x = e^t$ bo‘ladi. Berilgan tenglamaga o‘rniga qo‘ysak,

$f(t) = (e^t)^2 + e^t + 1$. Bundan $f(x) = e^{2x} + e^x + 1$.

Umuman olganda, $f(g(x)) = h(x)$ va $g(x)$ teskari funksiyaga ega bo‘lsa, u holda x ni $g^{-1}(x)$ bilan almashtirib $f(x) = h(g^{-1}(x))$ ga ega bo‘lamiz.

$\boldsymbol{Javob}$: $f(x) = h(g^{-1}(x))$

$\boldsymbol{Tenglamani\ yechish}$. Tenglamalarni o‘zgaruvchilarni almashtirib yechishdan so‘ng, ba’zan bir vaqtda yechiladigan tenglamalarga kelamiz. Bu tenglamalarni yechib biz noma’lum funksiyani topamiz. Noma’lum funksiyani o‘zgaruvchi deb olib odatdagi tenglamalarda, ularni yechamiz.

$\boldsymbol{4 - misol}$. Agar $\frac{f(x)}{3+f(x)} = \frac{4+x^2}{x^2}$ bo‘lsa, $f(x)$ ni toping.

$\boldsymbol{Yechish}$. Bu $x^2 f(x) = (4 + x^2)(f(x))$ ga ekvivalent. Uni soddalashtirib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x^2 f(x) = 3(4 + x^2) + (4 + x^2)f(x)$$

$$-4f(x) = 3(4 + x^2)$$

$$f(x) = -\frac{3(4 + x^2)}{4}.$$

$\boldsymbol{Javob}$: $f(x) = -\frac{3(4 + x^2)}{4}$

$\boldsymbol{Aniqlanmagan\ koeffitsiyentlar\ usuli}$. Noma’lum funksiya bir nechta shartlarni qanoatlantirishini bilsak, bu kvadrat yoki kubik funksiya deymiz, darhol o‘zgaruvchilarni aniqlay olamiz (ya’ni $f(x)$ kvadrat ko‘phad bo‘lsa, $f(x) = ax^2 + bx + c$ bo‘ladi) va o‘shalarga nisbatan yechamiz.

$\boldsymbol{5 - misol}$. Agar $f(x)$ funksiya $f(x + 1) - f(x) = 8x + 3$ shartni qanoatlantiruvchi kvadrat funksiya va $f(0) = 5$ bo‘lsa, $f(x)$ ni toping.

$\boldsymbol{Yechish}$. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ekanligini hisobga olsak, u holda

$a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c - ax^2 - bx - c = 8x + 3$.

Soddalashtirsak, $2ax + a + b = 8x + 3$.

Bu tenglamani yechib, $a + 4$ va $b = -1$ ga ega bo‘lamiz.

$x = 0$ ni qo‘yib, $c = 5$ ni topamiz.

Shuning uchun $f(x) = 4x^2 - x + 5$ bo‘ladi

$\boldsymbol{Javob}$: $f(x) = 4x^2 - x + 5$

Ko‘p o‘zgaruvchili funksional tenglamalar

Bittadan ortiq o‘zgaruvchili funksional tenglamalar uchun ham yuqorida keltirilgan usullarni qo‘llash mumkin. Biz bir nechta xususiy usullar bilan almashtirishga harakat qilamiz, berilgan shartga $x = y = 0$ ni qo‘shib bir nechta natijalar olishimiz mumkin. Bu ishlarni so‘zda ifodalash qiyin, shuning uchun har xil misollarda qo‘llab ko‘rishga harakat qilamiz.

$\boldsymbol{2.1 - misol}$. Agar $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ quyidagilarni qanoatlantirsa:

1.$f(1) = 2,$

2. barcha $x, y \in \mathbb{Q}$ uchun, $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$, $f(x)$ ni toping.

$\boldsymbol{Yechish}$. $y = 1$ ni kiritib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$f(x) = f(x)f(1) - f(x + 1) + 1 = 2f(x) - f(x + 1) + 1$$

$$f(x + 1) = f(x) + 1.$$

Birinchi shartni va matematik induksiyani qo‘llab, barcha butun x lar uchun $f(x) = x + 1$ ga ega bo‘lamiz.

Har qanday ratsional son $x = \frac{m}{n}$, bu yerda m, n butun son va $n \neq 0$. $x = \frac{m}{n}$, $y = n$ ni kiritsak, u holda

$f(m) = f(\frac{m}{n})(n + 1) - f(\frac{m}{n} + n) + 1$ bo‘ladi. $f(x + 1) = f(x) + 1$ dan boshlab $\forall x \in \mathbb{Q}$ uchun $f(\frac{m}{n} + n) = f(\frac{m}{n}) + n$ ga ega bo‘lamiz. Buni berilgan tenglamaga qo‘llasak $m + 1 = f(\frac{m}{n})(n + 1) - f(\frac{m}{n}) - n + 1$ ga ega bo‘lamiz. Shunday qilib $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} + 1$ bo‘ladi.

$\boldsymbol{Javob}$: $f(x) = x + 1$

Eslatma. Ko‘rinib turibdiki, bunday hollarda funksional tenglama xususiy hollarda yechiladi ($x \in \mathbb{Z}$ bo‘lganda $f(x)$ ni topdik), keyin umumiyroq hollar uchun yechiladi ($x \in \mathbb{Q}$ bo‘lganda $f(x)$ ni topdik). $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uchun shunga o‘xshash metodni qo‘llash mumkin. Birinchi, $x \in \mathbb{Z}$ bo‘lganda $f(x)$ topiladi. Keyin $x = \frac{m}{n}$ almashtirish bajarib $x \in \mathbb{Q}$ uchun $f(x)$ topiladi. Oxirida, $x \in \mathbb{R}$ ratsional sonlar to‘plami bilan birga $f(x)$ topiladi (faqat uzluksiz funksiyalar uchun). Buni keyinroq ko‘rib chiqamiz.

$\mathbf{2.2 - \mathit{misol}.}$ Agar barcha x, y lar uchun

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$$

bo‘lsa, $f(x)$ ni toping.

Yechish. Berilgan shart quyidagiga ekvivalent:

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-\frac{f(x-y)}{x-y}=4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$$

$\frac{f(x+y)}{x+y}-(x+y)^2=\frac{f(x-y)}{x-y}-(x-y)^2$ barcha x, y lar uchun.

Shunday qilib, $\frac{f(x)}{x}-x^2$ o‘zgarmas. $\frac{f(x)}{x}-x^2=k$ deb belgilab, $f(x)=$ $=x^3+kx$ ni hosil qilamiz.

Javob: $f(x)=x^3+kx$

Eslatma. Bu holda biz simmetrik shartga ega bo‘lamiz. Simmetriyani qo‘llab, funksional tenglamada bitta o‘zgaruvchi kattalikni kamaytiramiz. Bu simmetrik funksional tenglamalar uchun foydali.

$\mathbf{2.3 - \mathit{misol}.}$ Barcha $x, y \in \mathbb{R}$ uchun $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f\left(x^2+f(y)\right)=y+xf(x)$ shartni qanoatlantirsa, $f(x)$ ni toping.

Yechish. $x=0$ ni kiritsak, u holda $f\left(f(y)\right)=y$ bo‘ladi. Bundan

$$(1) f\left(y+xf(x)\right)=f\left(f\left(x^2+f(y)\right)\right)=x^2+f(y)$$

ga ega bo‘lamiz.

Endi x ni $f(x)$ bilan almashtirsak, $f(y+\left(f(x)f\left(f(x)\right)\right)=\left(f(x)\right)^2+f(y)$ bo‘ladi. $f\left(f(y)\right)=y$ ni eslasak, so‘ng

$$(2)\ f(y+xf(x)=\left(f(x)\right)^2+f(y).$$

(1) va (2) ni taqqoslab, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$(3)(f(x))^2 = x^2$$

Berilgan tenglamada y ni $f(y)$ bilan almashtirib, $f(x^2 + y) = f(y) + xf(x)$ ga ega bo‘lamiz. Ikkala tomonni kvadratga oshirib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$(x^2 + y)^2 = \left(f(x^2 + y)\right)^2 = f(y)^2 + x^2 f(x)^2 + 2xf(x)f(y) =$$
$$= x^4 + y^2 + 2xf(x)f(y).$$

Bundan, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$(4)xy = f(x)f(y).$$

(3) ga ko‘ra, $f(x) = x$ yoki $f(x) = -x$.

Agar $f(x) = x$ bo‘lsa, (4) ga ko‘ra $x \in \mathbb{R}$ uchun $f(x) = x$ bo‘ladi.

Agar $f(x) = -x$ bo‘lsa, (4) ga ko‘ra $x \in \mathbb{R}$ uchun $f(x) = -x$ bo‘ladi.

Shuning uchun $f(x) = x$ yoki $f(x) = -x$.

$\boldsymbol{Javob}$: $f(x) = x$ yoki $f(x) = -x$.

$\boldsymbol{Eslatma}$. Bu savolda o‘zgaruvchini boshqa narsalar bilan almashtiramiz (savolda x ni $f(x)$ bilan almashtirdik). Bu juda qulay usul. Bir qancha umumiy almashtirishlar o‘z ichiga oladi: x ni $f(x)$ bilan almashtirish; x ni $(f(f(x))$ bilan almashtirish; $x = 0$ almashtirish; $x = y = 0$ almashtirish; $x = 1$ almashtirish va hokazo.

$\boldsymbol{2.4 - misol}$. Agar $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ uzluksiz, barcha $1 < x, y \in \mathbb{R}$ uchun $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ bo‘lsa, $f(x)$ ni toping.

$\boldsymbol{Yechish}$. Bu tenglama $\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$ tenglamaga ekvivalent. Agar biz $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ deb olsak, u holda tenglama quyidagiga keladi:

$g(xy) = g(x) + g(y)$ qaysiki yuqoridagi xulosaning (ii) bandiga ko‘ra (garchi ular orasiga kichikroq farq bo‘lsa ham). Shunday qilib $g(x) = c\ lnx$ va $f(x) = xg(x) = cx\ lnx$ ga ega bo‘ldik.

$\boldsymbol{Javob}$: $g(x) = c\ lnx$ va $f(x) = xg(x) = cx\ lnx$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Ubaydullayev A.N. Kasr va irratsional tengsizliklarni yechishda algoritmik metod tadbiqi // Zamonaviy informatikaning dolzarb muammolari: o'tmish tajribasi, istiqbollari respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjuman materiallari. Toshkent, 2023. – B. 549-554.

2. M.A.Mirzaaxmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amonov. Matematika (algebra va analiz asoslari) 11-sinf. T.: Zamin nashr. 2018 y, -37 s

3. M.N. Beshmakov. Algebra i nachala analiza. Ucheb dlya 10-11 kl. Sred. shk.2-ye.izd.-M.:Prosveshenie, 1992. -351 s

4. Ubaydulloyev A.N., Jo'rayev H.O. Mathcad dasturida algebraik masalalarni yechish // "Ta'lim va innovatsion tadqiqotlar" Ilmiy-metodik jurnal, № 3, Buxoro, 2023. – B. 143-146 (13.00.00).

5.M.A.Mirzaaxmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amonov. Matematika (algebra va analiz asoslari) 11-sinf. T.: Zamin nashr. 2018 y, -37 s

6. T.Azlarov, X. Mansurov. Matematik analiz, 1-qism. Toshkent. O'qituvchi. 1994

7. Ubaydullayev A.N., Kilichov O.Sh. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki.// On one boundary value problem for the fourth-order equation in partial derivatives. vol.39, №2, 2022. – P. 32-41.