ДИФФУЗИЯ ТЕНГЛАМАСИНИ ФУРЬЕ УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ ВА УНИНГ ТАДБИКЛАРИ

Дехқонов Хусан Турсунович
Наманган давлат университети тайанч докторанти
khusanboyd4686@gmail.com

https://doi.org/10.5281/zenodo.10836384

ANNOTATSIYA

Ғовакли модда билан тўлдирилган ва ён сиртлари бўйича ажратилган (изоляцияланган) найча (трубка) ни олайлик. Агар найчада бирор газ бўлиб, унинг концентрацияси баъзи бир жойларида бошқа жойларидагига нисбатан ортиқ бўлса, у ҳолда физикадан маълумки вақт ўтиши билан газ концентрацияси кўп бўлган жойлардан концентрацияси оз бўлган жойларга оқиб ўтади. Бу ҳодисани диффузия дейилади. Диффузияни суюқ муҳитда ҳам кузатиш мумкин.

Kalit so'zlar: *Диффузия, Фурье усули, характеристик тенгламаси, модел.*

КИРИШ

Диффузия тенгламасини Фурье усули билан ечиш

$$(1)\, u_t' - a^2 u_{xx}'' = 0 \quad (0 < x < l)$$

диффузия тенгламасини

$$(2)\, u(x,0) = f(x) \quad (0 \le x \le l)$$

бошланғич шарт ва ихтиёрий $t \ge 0$ да

$$(3)\, u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

чегаравий шартларда Фурье – ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечамиз.

(1) тенглама учун аввал айнан нолга тенг бўлмаган ечимни

$$(4)\ u = X(x)T(t)$$

кўринишда излаймиз.

ларни (1) га қўйиб, $XT' = a^2 X''T$ $u_t' = XT',\ \ u_{xx}'' = X''T$

ёки $$(5)\ \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T}$$

га эга бўламиз. Бу тенглик чап ва ўнг томонлари ўзгармас сонга тенг бўлгандагина ўринли бўлади. Ўша сонни $-\lambda^2$ билан белгилаб,

$$(6)\ \frac{X''}{X} = -\lambda^2,\ \ \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2$$

ни оламиз. Бу ердан

$$(7)\ X'' + \lambda^2 X = 0,\ \ T' + a^2\lambda^2 T = 0$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Булардан биринчининг характеристик тенгламаси $k^2 + \lambda^2 = 0$ нинг илдизлари $k_{1,2} = \pm\lambda i$ бўлади. Бу ердан

$$(8)\ X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$$

умумий ечимни топамиз, бу ерда A ва B ҳар қандай ўзгармас сонлар. (7) даги иккинчи тенглама ўзгарувчиларни ажратиб ечилганда

$$(9)\ T(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}$$

ечим келиб чиқади, бу ерда C – ҳар қандай ўзгармас сон. (4), (8), (9) дан

$$(10)\ u = e^{-a^2\lambda^2 t}\left(A\sin\lambda x + B\cos\lambda x\right)$$

ни оламиз, бу ерда AC ни A га ва BC ни B га алмаштириб $C = 1$ олинди. (10) ечимнинг (3) шартларни қаноатлантиришини талаб қиламиз. $x = 0$ десак,

$$Be^{-a^2\lambda^2 t} = 0$$

дан $B = 0$ ва демак

$$(10)\, u = Ae^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda x$$

ҳосил бўлади.

$x = l$ да (3) га кўра

$$(11)\; 0 = Ae^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda l$$

бўлади. Бунда $A \neq 0$, чунки акс ҳолда $u \equiv 0$ ечим олган бўлар эдик. Шунинг учун

$$(12)\sin\lambda l = 0$$

ва

$$(13)\;\lambda l = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

бўлади.

Бу ердан

$$(14)\,\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

ҳар бир λ_n га

$$(15)\, u_n = A_n e^{-b^2 n^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

хусусий ечим мос келади, бу ерда $b = \dfrac{a\pi}{l}$.

n нинг фақат бутун мусбат қийматларини олиш кифоя, чунки $n = 0$ да $u \equiv 0$ бўлади, бу эса шартимизга мувофиқ эмас. $n < 0$ да эса $n' = -n > 0$ га мос ўша табиатдаги ечимларни оламиз.

НАТИЖА.

Шундай қилиб, (15) формула (1) тенгламанинг (3) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи (4) кўринишидаги чизиқли эркли хусусий ечимларининг тўла тўпламини беради.

Энди (2) бошланғич шартнинг қаноатлантирилишини таъминлаймиз. (1) тенглама чизиқли ва бир жинсли бўлганлиги учун унинг ихтиёрий сондаги ечимларининг йиғиндиси ҳам яна ўзининг ечими бўлишлигидан

$$(16)\, u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-b^2 n^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

га эга бўламиз. Агар (16) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда маълум шартларда (16) функция (1) тенгламанинг ечими бўлади. (16) формулада $t=0$ деб (2) бошланғич шартга кўра

$$(17)\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

ни ҳосил қиламиз. Ёйилманинг коэффициентлари учун

$$(18)\ A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,...)$$

формулалар ўринли.

Шундай қилиб, масаланинг ечими (16) қатор билан берилади, унинг коэффициентлари (18) формула билан аниқланади. Амалиётда бу қаторнинг бир қанча ҳадларини олиш етарли.

МУХОКАМА

Микроорганизмларнинг диффузияси модели**.** Аввалги мавзуларда популяция сонининг яшаш жойининг ўзида ўзгариши билан қизиқдик. Биз популяциянинг фазода кўчиши билан, жойнинг турли қисмларида зичлигининг ўзгариши билан қизиқмадик. Бундай қараш жой кичик бўлса, ёки жой физик хусусиятлари бўйича бир жинсли бўлса, ўринли бўлади.

Акс ҳолда вақтга боғлиқ ўзгаришларнигина эмас балки фазовий ўзгаришларни ҳам ўрганиш зарурияти пайдо бўлади, чунки бир жинсли бўлмаган фазонинг турли соҳаларида популяция ҳар хил ривожланиши мумкин.

Ичида газ бўлган найча ҳақидаги масалада вақтнинг t моментида қийматлари газнинг берилган нуқтадаги концентрациясига тенг бўлган функцияни топишга ёрдам берувчи математик моделни келтирамиз. Найчани Ox ўқи бўйлаб шундай жойлаштирайликки, унинг чап чети координаталар ўқи боши билан, ўнг чети эса l нуқта билан устма-уст тушадиган бўлсин, бу ерда l найча узунлиги.

Вақтнинг тайин моментида $x \in [0,l]$ нуқтадан ўтувчи кесимнинг барча нуқталарида концентрациялар тенг деб фараз қиламиз. Бу фараз, масалан, диаметри етарлича кичик бўлган найчалар учун ўринли бўлади.

Вақтнинг t моментида $x \in [0,l]$ нуқтадан ўтувчи кесимда газнинг концентрациясини $u(t,x)$ билан белгиласак, у функция $0<t<T,\ 0<x<l$ тўғри тўртбурчакда барча t ва x учун

$$(17)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенгламани қаноатлантиради, яъни (17) тенгламанинг ечими бўлади. Бу ерда $a^2 = \frac{D}{c} > 0$, D-диффузия коэффициенти, у қиймати диффузияланаётган модда (бу ҳолда газ) ва муҳит хоссалари билан аниқланади, c–ғоваклилик коэффициенти; у ковакчалар ҳажмининг найчанинг қаралаётган қисмининг умумий ҳажмига нисбатига тенг. (17) тенгламани диффузия тенгламаси дейилади.

Агар диффузияни найчада эмас, балки етарлича юпқа пластинкада ўрганилса, у ҳолда $u(t, x, y)$ концентрация

$$(18)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

тенгламани қаноатлантиради. Уч ўлчовли фазода диффузия

$$(19)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

тенглама билан ифодаланади.

Шундай қилиб найчада диффузияланаётган модданинг концентрацияси хусусий ҳосилали иккинчи тартибли (17) дифференциал тенгламанинг ечимларининг биридан иборат. Бундай ечимлар чексиз кўп. Ҳақиқатан ҳам, масалан, t бўйича доимий ва x бўйича чизиқли бўлган ҳар қандай функция, яъни $u(t,x) = Ax + B$ (1) нинг ечими бўлади, яна

$$u(t,x)=e^{-a^2t}(A\cos x+B\sin x)$$

функция ҳам ечим бўлади, бу ерда A ва B – ихтиёрий ўзгармаслар. Концентрация сифатида қайси ечимни олиш керак деган саволга жавоб бериш учун, одатда тажрибадан изланаётган концентрация ҳақида баъзи маълумотлар маълум бўлишини ҳисобга оламиз. Масалан t=0 да $u(0,x)$ концентрация маълум бўлиши мумкин. Ундан ташқари вақтнинг ҳамма моментлари учун найча учларидаги концентрация маълум бўлиши мумкин. Шундай қилиб, (17) тенгламанинг мумкин бўлган барча ечимларидан бизни $0\le t\le T,\ 0\le x\le l$ тўғри тўртбурчакда узлуксиз ва қўшимча

$$u(0,x)=\varphi(x) \tag{20}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(t,0)=\varphi_1(t) \\ u(t,l)=\varphi_2(t) \end{array}\right\} \tag{21}$$

шартларга буйсунадиган ечимлар қаноатлантиради, бу ерда φ, φ_1, φ_2 – берилган функциялар. (4) тенгликни бошланғич шарт, (5) тенгликлар чегаравий шартлар дейилади.

Агар идиш ичида микроорганизмлар ҳаракати фақат диффузия қонунига бўйсунса, у ҳолда концентрация диффузия тенгламасини қаноатлантириши керак. Ox ўқини юқорига йўналтириб, биз (17) тенгламадан фойдаланишимиз мумкин.

Энди биз бошланғич ва чегаравий шартларни ўрнатишимиз керак. Идиш баландлиги l бўлсин, $[0,l]$ оралиқни иккита $[0,l_1]$ ва $[l_1,l]$ оралиқларга бўламиз. Энг юқори қатламга мос келувчи $[l_1,l]$ оралиқ етарлича кичик бўлиб, унда диффузия қонуни амал қилмайди. Микроорганизмлар бу қатламда сиртдаги озуқани сезиб унга интиладилар. Шунинг учун уларнинг концентрацияси l_1 сатҳда (озуқа ҳақида ҳозирча билмайдиганлар соҳаси бўлмиш) $[0,l_1]$ қатламдагига нисбатан ҳар вақт кам бўлади (l_1 сатҳдан организмлар сиртга кетадилар, l_1 да концентрация ўсмайди, балки камаяди, $[0,l_1]$ қатламдаги организмлар озуқа ҳақида билмайдилар). Бу эса x=l_1 да $u'_x = (t, l_1)$ ҳосила ихтиёрий t да манфийлигини билдиради. $u'_x = (t, l_1)$ ҳосила l_1 сатҳдан вақтнинг бир бирлигида организмларнинг камайиш миқдорини характерлайди. Бу миқдор l_1 сатҳда концентрация қанча катта бўлса, шунча катта бўлади, чунки шунча катта сондаги организмлар озуқа хақида билади ва озуқага интилади, яъни l_1 дан камайиш шунча катта бўлади. Шундай қилиб биз

$$(22)\, u'_x(t, l_1) = -ku(t, l_1)$$

деб ҳисоблашимиз мумкин. Бу ерда k>0 пропорционаллик коэффициенти.

Бу тенглик чегаравий шартлардан бири бўлади. Бошқа шарт жуда содда: тубда, яъни x=0 да микроорганизмлар уларга узоқ бўлган сиртдаги озуқани сезмайди, ундан таъсирланмайди ва идиш ичига интилмайди. Улар идишдан туб орқали чиқиб ҳам кета олмайди. Бу эса

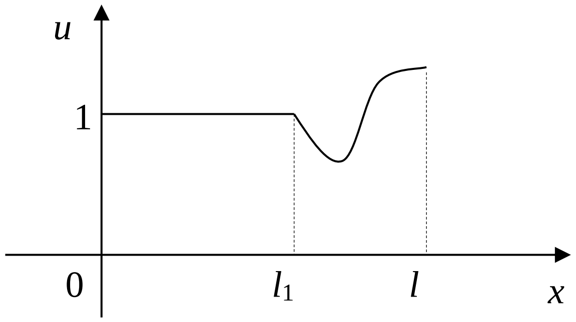
$$(23)\, u'_x = (t, 0) = 0$$

эканлигини билдиради.

Бу чегаравий шартларга бошланғич шартни, яъни вақтнинг бошланғич моменти t=0 даги концентрация қийматини қўшимча қиламиз. Озуқа пайдо бўлгунга қадар концентрация ҳамма ерда доимий, масалан 1 га тенг. Озуқа пайдо бўлиши билан (бу бошланғич моментнинг ўзгинаси) сиртнинг ўзида концентрация кўпаяди, l_1 нуқтадан юқорироқда камаяди, сиртдан узоқ бўлган нуқталарда эса ўзгармайди. Шундай қилиб, бошланғич моментда концентрация қиймати

$$(24)\, u(0, x) = \varphi(x)$$

олинади, бу ерда $\varphi(x)$ берилган функция, унинг тахминий графиги шаклда кўрсатилган



Масала (1) тенгламанинг $0<t<T$, $0<x<l_1$ тўғри тўртбурчакда аниқланган (22), (23) ва (24) шартларни қаноатлантирадиган $u(t,x)$ ечимини топишдан иборат.

ХУЛОСА

Озуқани фақат озуқага яқин бўлган энг юқори қатламдаги микроорганизмлар сезадилар ва озуқага интиладилар. Қолганлари эркин диффузияланадилар. Аммо энг юқори қатлам озуқага интилиб кетганлар ҳисобига бўшаб қолади, бу жойга диффузия қонунлари бўйича пастроқдаги қўшни қатламдаги микроорганизмлар итарилиб ўтадилар. Буларнинг концентрация камайиб қолган ўрниларига ўз навбатида янада пастроқ қатламдаги микроорганизмлар ўтадилар ва ҳоказо идиш тубигача бу жараён давом этади.

АДАБИЙОТЛАР

1. *CantrellR.S,CosnerC.Spatial ecologyviareaction-diffusionequations.John WileyandSonsLtd.,Chichester,UK,2003.*

2. ChenX,FriedmanA.Afreeboundaryproblemarising inamodel ofwound healing,SIAMJ.Math.Anal.2000,Vol.32,pp.778-800.

3. DuY.H,Lin,Z.G.Spreading-vanishingdichotomyinthediffusivelogisticmodel withafreeboundary.SIAMJ.Math.Anal.2010,Vol.42,pp.377-405.

4. DuY.H,Lin,Z.G.Thediffusivecompetitionmodelwithafreeboundary:invasion of asuperioror inferiorcompetitor, DiscreteContin. Dyn. Syst.Ser.B. 2014. Vol.19,3105-3132. Dynamics for a two-species competitive quasi-linear... 145

5. Duan B., Zhang Z.C. A two-species weak competition system of reaction diffusion-advection with double free boundaries, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 2019, Vol.24, No.2, pp. 801-829.

6. Friedman A. Free boundary problems in biology. Philos Trans R Soc. 2015, A 373: 20140368.

7. Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Courier Dover Publications, 2008.