DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.11094970

OLINGAN NILPOTENT LEYBNITS ALGEBRASINING YECHILUVCHAN KENGAYTMASI

Jo‘rayev Muhammadali Erkin o‘g‘li
Termiz davlat unversiteti
70540101 (yo‘nalishlar bo‘yicha) ta’lim yo‘nalishi 2-bosqich magistranti

Hozirgi kunda Li algebralarining umumlashmasi hisoblangan Leybnits algebralari sinfi jadal suratda o‘rganilmoqda. Leybnits algebralari o‘tgan asrning 90-yillarida fransuz matematigi J.L. Lode tomonidan ushbu

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$$

Leybnits ayniyati bilan xarakterlanadigan algebra sifatida fanga kiritilgan [4].

Ta’kidlash joizki, Leybnits ayniyatini qanoatlantiruvchi algebra birinchi bo‘lib 1965 yilda A. Bloxning ishida D-algebralar nomi bilan kiritilgan edi. Lekin, D-algebralarni o‘rganishga unchalik e’tibor berilmagan bo‘lib, faqatgina J.L. Lode va T.Pirashvilining ishlaridan keyingina Leybnits algebralari jadal suratda o‘rganila boshlandi va hozirgi kunga kelib bu algebralarga bag‘ishlangan bir qator maqolalar chop qilindi [1-3].

J.L. Lode va uning ilmiy hamkorlari tomonidan asosan Leybnits algebralari kogomologik nuqtai nazardan o‘rganilgan bo‘lsa, Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov, I.S.Raximov, A.X.Xudoyberdiyev va boshqa olimlarning ishlarida bu ob’ektning strukturaviy nazariyasi o‘rganilgan [1,2,3].

1-ta’rif. F maydoni ustida L algebra berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x, y, z \in L$ elementlar uchun quyidagi ayniyat bajarilsa:

$$[x,[y,z]] - [[x,y],z] + [[x,z],y] = 0$$

bu yerda $[-,-] - L$ da aniqlangan ko‘paytirish amali. U holda L algebrasi *Leybnits algebrasi* deyiladi.

Ixtiyoriy L Leybnits algebrasi uchun quyidagi ketma-ketliklarni aniqlaymiz:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}],\ \ k \geq 1$$

$$L^{1}=L,\ L^{k+1}=[L^{k}, L^{1}],\ \ k \geq 1.$$

2-ta’rif. L Leybnits algebrasi ye*chimli* deyiladi, agar shunday $m\in N$ mavjud bo‘lsaki, natijada $L^{[m]}=0$ bo‘lsa. Ana shunday m larning eng kichigiga L yechimli algebraning indeksi deyiladi.

3-ta’rif. L Leybnits algebrasi *nilpotent* deyiladi, agar shunday $s\in N$ mavjud bo‘lsaki, natijada $L^s=0$ bo‘lsa. Ana shunday xususiyatga ega bo‘lgan minimal s soni nilpotentlik indeksi yoki L algebrasining nilindeki deyiladi.

4-ta’rif. L Leybnits algebrasining maksimal nilpotent idealiga uning *nilradikali* deyiladi.

5-ta’rif. Bizga ushbu $d:L\to L$ chiziqli akslantirish berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x,y\in L$ elementlar uchun quyidagi tenglik bajarilsa**:**

$$d(xy)=d(x)y+xd(y).$$

U holda d chiziqli akslantirish L algebrada *differensiallash* deyiladi.

Bizga L Leybnits algebrasi berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $x\in L$ element uchun R_x: $L\to L$ chiziqli akslantirish aniqlaylik.

$$R_x(y)=[y, x] \qquad y\in L.$$

R_x Operator L leybnits algebrasining differensiallashi bo‘ladi. Bunday differensiallashlar *ichki differensiallash* deyiladi.

Bizga ma’lumki ixtiyoriy R yechimli Leybnits algebrasini quyidagicha yozish mumkin

$$R=N+Q$$

Bu yerda N –nilradikal, Q –to‘ldiruvchi qism fazo.

Bizga $f_1, f_2, \ldots, f_k$ chiziqli akslantirishlar berilgan bo‘lsin va ular orqali aniqlangan

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\ldots+\alpha_k f_k = 0 \qquad (1)$$

chiziqli akslantirish berilgan bo‘lsin.

Agar α_i lrning kamida bittasi noldan farqli bo‘lganda (1) akslantirish nilpotent bo‘lmasa $f_1, f_2, \ldots, f_k$ lar nil-bog‘liq bo‘lmagan akslantirishlar deyiladi.

Quyidagi lemma, nilradikali berilgan yechimli Leybnits algebrasining to‘ldiruvchi qism fazosining o‘lchami haqida.

1-lemma. [2] Q –to‘ldiruvchi qism fazoning o‘lchami, N –nilradikalning nil-bog‘liq bo‘lmagan differensiallashlari sonidan katta emas.

Biz quyidagi nilpotent Leybnits algebrasining yechiluvchan kengaytmasini o‘rganamiz. Bu algebra ushbu [3] ishda keltirilgan.

$$\mu: [e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, f_1] = e_2 + f_2, [e_2, f_1] = e_3.$$

1-tasdiq. μ algebrasining differensiallashlari fazosining matritsaviy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi.

$$Der(\mu) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ 0 & 2a_1 + b_1 & a_2 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 3a_1 + 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a_1 + b_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix}.$$

1-teorema. Nilradikali μ ga izomorf bo‘lgan yechiluvchan Leybnits algebralari quyidagi o‘zaro izomorf bo‘lmagan algebralaridan biriga izomorf.

$$R_1: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, f_1] = e_2 + f_2, [e_2, f_1] = e_3. \\ [e_1, x] = f_1, [e_2, x] = e_2 + f_2, [e_3, x] = 3e_3, [f_1, x] = f_1, \\ [x, e_1] = -f_1, [x, f_1] = -f_1. \end{cases}$$

$$R_2: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, f_1] = e_2 + f_2, [e_2, f_1] = e_3. \\ [e_1, x] = f_1, [e_2, x] = e_2 + f_2, [e_3, x] = 3e_3, [f_1, x] = f_1, \\ [x, e_1] = -f_1, [x, f_1] = -f_1, [x, x] = f_2. \end{cases}$$

$$R_3(\alpha): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, f_1] = e_2 + f_2, [e_2, f_1] = e_3. \\ [e_1, x] = f_1, [e_2, x] = e_2 + f_2, [e_3, x] = 3e_3, [f_1, x] = f_1, \\ [x, e_1] = -f_1 + f_2, [x, f_1] = -f_1, [x, x] = \alpha f_2. \end{cases}$$

$$R_4(\alpha, \beta): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, f_1] = e_2 + f_2, [e_2, f_1] = e_3. \\ [e_1, x] = f_1, [e_2, x] = e_2 + e_3 + f_2, [e_3, x] = 3e_3, [f_1, x] = f_1, \\ [x, e_1] = -f_1 + \alpha f_2, [x, f_1] = -f_1, [x, x] = \beta f_2. \end{cases}$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Аюпов Ш.А., Омиров Б.А. Нильпотентные свойства алгебры Лейбница $M_n(C)_D$. Сиб. мат. Журнал. – 2004. – Т. 45. - № 3. - С. 399-409.
2. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz algebras with naturaly graded filiform nilradical, Linear algebra and its Applications, vol. 438(7), 2013, p. 2973-3000.
3. Camacho L.M., Gomez J.R., Gonzalez A.J., Omirov B.A., Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras, Comm. Algebra 38 (10)(2010), 3671-3685.
4. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. – 1993. - Vol. 39. – P. 269-293.