DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.11253536

FIZIK MASALALAR YECHIMINI ANIQ INTEGRALGA MODELLASHTIRISH

Gulzoda Muhiddinova Shukur qizi
Qarshi xalqaro universiteti assistenti
E-mail: gulzoda0301@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada oliy o‘quv yurtlarida ta’lim oladigan talabalarning mutaxassislik fanlarida uchraydigan bir qancha kasbiy masalalari, ularni yechimini topishda matematik modellashtirishning ahamiyatlari va unga turlicha yondashuvlar keltirilgan.*

Kalit so‘zlar: *Aniq integral, o‘zgaruvchan tezlik, bosib o‘tilgan yo‘l, o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi, suyuqlikning bosim kuchi, kinetik energiya.*

Аннотация: *В данной статье даны многие профессиональные проблемы студентов, обучающихся в технических вузах, важность математического моделирования и различных подходов к их решению.*

Annotation: *This article presents a number of professional issues of students studying in higher educational institutions, the importance of mathematical modeling in solving them, and different approaches to it.*

Bugungi kun uchun dolzarbligi: Aniq integralning geometriya va mexanikaga tatbiqlarida masalalarni yechish uchun berilgan geometrik figura n ta ixtiyoriy qismlarga ajratilib qo‘yilgan masala avval figuraning bitta qismi (elementar bulagi) uchun hal etiladi. Keyin olingan natijani jamlab integral yig‘indi tuziladi. Integral yig‘indida limitga o‘tilsa qo‘yilgan masalani yechish uchun aniq formula chiqariladi. Quyidagi maqolada fizik jaryonlarni aniq integral yordamida hal qilinganlarini ko‘ramiz.

O‘zgaruvchan tezlikka ega nuqtaning bosib o‘tgan yo‘li.

Faraz qilaylik nuqta o‘zgaruvchan v tezlik bilan to‘g‘ri chiziqli harakat qilayotgan bo‘lsin. v tezlik t vaqtning ma’lum funksiyasi, ya’ni $v=f(t)$ bo‘lsin. Nuqtani vaqtning t_0 momentidan T mamentigacha bosib o‘tgan yo‘lini aniqlash talab etilsin. $[t_0, T]$ oraliqni n ta ixtiyoriy $[t_0, t_1],[t_1, t_2],\dots,[t_{i-1},t_i],\dots,[t_{n-1}, t_n]$ $(t_n=T)$ qismlarga ajratamiz. Har bir

$[t_{i-1},t_i]$ $(i=\overline{1,n})$ bo‘lakda ixtiyoriy z_i nuqta olib bu oraliqda nuqtaning tezligi o‘zgarmas va u $f(z_i)$ ga teng deb faraz qilamiz. U holda nuqtaning $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan yo‘li ΔS_i taqriban $f_i(z_i)\,\Delta t_i$ ga teng bo‘lishi ayon. Nuqtaning butun $[t_0,T]$ oraliqda o‘tgan yo‘li

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta t_i$$

bo‘ladi. Bu yig‘indi $[t_0,T]$ kesmada $f(t)$ funksiya uchun integral yig‘indi ekanligini hisobga olib oxirgi taqribiy tenglikda $max\,\Delta\, t_i \to 0$ da limitga o‘tsak

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)dt = \int_{t_0}^{T} f(t)dt$$

kelib chiqadi. Bu $[t_0,T]$ vaqt oralig‘ida nuqtaning bosib o‘tgan yo‘lini topish formulasidir**.** [1, 135]

1-misol. *48km/soat* tezlik bilan harakatlanayotgan avtomobil tormoz berib tezligini kamaytira boshladi va *3* sek. dan keyin to‘xtadi. Avtomobil butunlay to‘xtaguncha qancha masofani bosib o‘tishini toping (ishqalanishni va havoning qarshiligini hisobga olmang).

Yechish. Tekis sekinlanuvchan harakatning tezligi $v=v_0-at$ formula orqali topiladi, bu yerda v_0-boshlangich tezlik, a-tezlanish.

Masalaning shartiga ko‘ra $v_0 = 48\,km/soat = 48 \cdot \frac{1000m}{3600s} = \frac{40}{3} \cdot \frac{m}{s}$.

Tezlanish a ni avtomobil *3 sek.* dan keyin to‘xtash shartidan, ya’ni $t=3$ sekunda $v=0$ shartdan topamiz: $0 = \frac{40}{3} - a \cdot 3,$ $a = \frac{40}{9}\frac{m}{sek^2}$.

v_0 va a ning qiymatini tezlikning formulasiga qo‘yib, topamiz: $v = \frac{40}{3} - \frac{40}{9}t$.

Demak, $S = \int_0^3 \left(\frac{40}{3} - \frac{40}{9}t\right)dt = \left(\frac{40}{3}t - \frac{40}{9}\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^3 = 40 - 20 = 20\,(m).$

O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi.

M moddiy nuqta *F* kuch ta’siri ostida *0x* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanayotgan bo‘lsin va bunda kuchning yo‘nalishi harakat yo‘nalishi bilan bir xil bo‘lsin (*F* kuch *0x* o‘qqa parallel va ular bir xil yo‘nalgan).

Shu *F* kuchning *M* moddiy nuqtani *x=a* vaziyatdan *x=в* vaziyatga ko‘chirishda bajarogan ishi *A* ni topish talab etilsin. [2, 240]

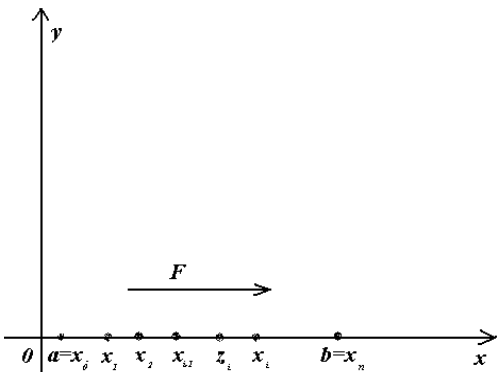
Bunda ikki holatni kuzatish mumkin.

1. *F* kuch o‘zgarmas bo‘lsin. U holda nuqtani *x=a* vaziyatdan *x=в* vaziyatga ko‘chirishda *F* kuchning bajargan ishi

$A=F(b-a)$ (1)

formula yordamida topilishi ma’lum.

2. *F* kuch *M* nuqtaning vaziyatiga bog‘liq ravishda o‘zgarsin, ya’ni *[a,b]* kesmada *F(x)* uzluksiz funksiya bo‘lsin. U holda *F* kuch bajargan *A* ishni quyidagicha topiladi (1- chizma).



1-chizma.

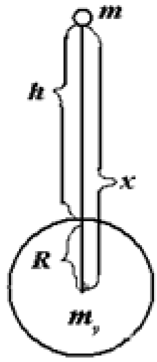
[a,b] kesmani $a=x_o< x_1< x_2<\dots x_{i-1}< x_i<\dots< x_n=b$ nuqtalar yordamida *n* ta ixtiyoriy $[x_{i-1}, x_i]$ $(\ i=\overline{1,n})$ mayda qismlarga ajratib har bir $[x_{i-1}, x_i]$ bo‘lakda bittadan ixtiyoriy z_i nuqta olamiz. Uzunligi $\Delta x_i= x_i- x_{i-1}$ bo‘lgan $[x_{i-1}, x_i]$ mayda bo‘lakda *F* kuch o‘zgarmas va u $F(z_i)$ga teng deb faraz qilamiz. U holda (1) formulaga ko‘ra *F* kuchning $[x_{i-1}, x_i]$ oraliqda bajargan ishi

$$A\approx F(z_i)\ \Delta\ x_i$$

bo‘ladi. Shunga o‘xshash mulohazalarini har bir kesma uchun o‘tkazib *F* kuchning *[a,b]* kesmada bujargan ishi *A* ning taqribiy qiymati $A\approx\sum_{i=i}^{n}F(z_i)\Delta x_i$ ni hosil qilamiz. Bu tenglikning o‘ng tomonidagi yig‘indi *[a,b]* kesmada uzluksiz *F(x)* funksiya uchun integral yig‘indi bo‘ladi. Shuning uchun u $\lambda=max\Delta x_i\to 0$ da aniq limitga ega va *F(x)* funksiyadan *[a,b]* oraliq bo‘yicha olingan aniq integralga teng, ya’ni

$$A = \int_a^b F(x)dx. \ (2)$$

2-misol. Yer sathidan vertikal yo‘nalishda m massali jismni h balandlikka chiqarish uchun zarur bo‘lgan kuchning bajargan A ishi topilsin (2-chizma).



2-chizma.

Yechish: Yerning tortish kuchini F_i massasini m_y, jismdan yerning markazigacha masofani x desak Nyuton qonuniga ko‘ra$F = G\frac{m\cdot m_y}{x^2}$bo‘ladi. Agar $Gm\cdot m_y=K$ belgilashni kiritsak $F(x) = \frac{K}{x^2}$ ga ega bo‘lamiz, bunda $R \le x \le h+R$ R-yerning radiusi. $x= R$ da $F(R)$kuch jismning og‘irlik kuchi $P=m\cdot g$ ga teng va $\frac{K}{x^2} = \text{P}$, $K=PR^2$, $F(x) = \frac{PR^2}{x^2}$.

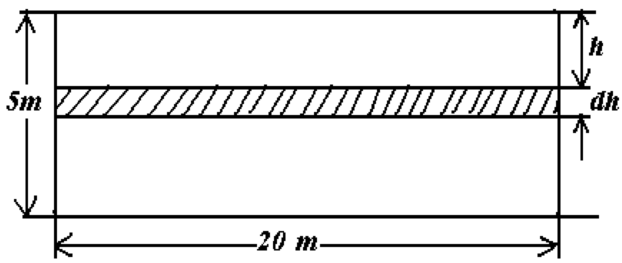
Buni (2) formulaga qo‘yib quyidagini hosil qilamiz.

$$A = \int_R^{R+h} F(x)dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \frac{1}{x}\Big|_{R+h}^{R} = -\frac{PR^2}{R+h} + \frac{PR^2}{R} = \frac{PRh}{R+h}.$$

Suyuqlikning bosim kuchini hisoblash

Suyuqlikning bosim kuchini hisoblash uchun Paskal qonunidan foydalaniladi, unga ko‘ra cho‘kish (botish) chuqurligi h bo‘lgan s yuzga suyuqlikning bosim kuchi $P=\gamma hs$ ga teng, bu yerda γ-suyuqlikning solishtirma og‘irligi.

3-misol. Vertikal to‘g‘on asosi *20m* va balandligi *5m* bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak shaklida (suvning sathi to‘g‘onning yuqori asisi bilan barobar), suvning butun to‘g‘onga bosim kuchini toping (3-chizma)



3-chizma.

Yechish. Paskal qonuniga muvofiq: *P=γhs=9,807 hs(n)* (suv uchun *γ=1000kg/m³=1000·9,807kg/m³)* ya'ni bosim kuchi *h* chuqurlikning birorta *p(h)* funksiyasidan iborat. Eni juda kichik *dh* ga teng shtrixlanagan to‘g‘ri to‘rtburchakni olib uni *h* chuqurlikda gorizontal joylashgan deb faraz qilamiz. U holda bu bo‘lakchaga bo‘lgan bosim

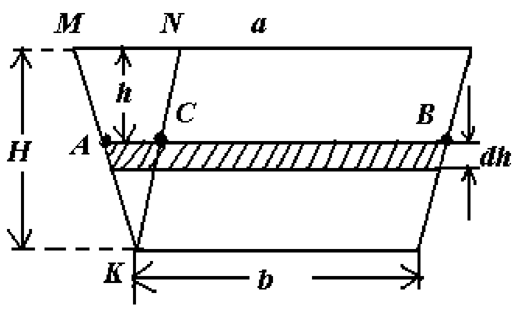
dh=9807h·20dh=9807·20hdh

bo‘ladi. Buni 0 dan 5 gacha integrallab suvning butun to‘g‘onga bosim kuchini topamiz:

$$P = 9807 \cdot 20 \int_0^s hdh = 9807 \cdot 10 \cdot h^2 \Big|_s^0 = 9807 \cdot 250(n) = 2451750(n)$$

$$= 2{,}45(mn).$$

4-misol. Vertikal to‘g‘on teng yonli trapetsiya Shaklida bo‘lib, yuqori asosi *a=6,4 m,* pastki asosi *b=4,8 m,* balanligi esa *H=3 m.* Suvning butun to‘g‘onga bosim kuchini toping (4-chizma).



4-chizma.

Yechish. Trapetsiyaning shtrixlangan bo‘lakchasi *h* chuqurlikda gorizontal joylashgan va u tomonlari *AB* va *dh* bo‘lgan

to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat deb faraz qilamiz. U holda bu bo‘lakka bo‘lgan suvning bosimi.

dp=9807hABdh=9807h(AC+CB)dh=9807h(AC+b)dh (n) bo‘ladi. AC ni KAC va KMN uchburchaklarning o‘xshashligidan topamiz:

$$\frac{AC}{MN}=\frac{H-h}{H}, \quad \frac{AC}{a-b}=\frac{H-h}{H}, \quad AC=\frac{a-b}{H}(H-h).$$

Bu ifodani h bo‘yicha 0 dan H gacha integrallab, butun to‘g‘onga ta’sir etayotgan bosim kuchini topamiz: $P=9807\cdot\frac{1}{H}\int_0^H h(aH-h(a-b)dh)=9807\cdot\frac{1}{H}\int_0^H[aHh-(a-b)h]dh=9807\cdot\frac{1}{H}\left(\frac{aHh^2}{2}-\frac{(a-b)h^3}{3}\right)\Big|_0^H=$

$$=9807\cdot\frac{1}{H}\left(\frac{aH^3}{2}-\frac{(a-b)H^3}{3}\right)=9807\cdot\frac{H^3}{H}\left(\frac{3a-2a+2b}{6}\right)$$

$$=9807\cdot\frac{H^2(a+2b)}{6}.$$

bunga $H=3\ m$, $a=6{,}4\ m$, $b=4{,}8\ m$ qiymatlarni qo‘yib, topamiz:

$$P=9807\cdot\frac{9(6{,}4+4{,}8\cdot 2)}{6}=9807\cdot 24=235368\,(n).$$

Kinetik energiya

Massasi m ga, tezligi v ga teng bo‘lgan moddiy nuqtaning kinetik energiyasi deb $k=\frac{mv^2}{2}$ kattalikka aytiladi.

Massalari $m_1, m_2, \dots, m_n$, tezliklari mos ravishda $v_1, v_2, \dots, v_n$, larga teng bo‘lgan n ta moddiy sistemasining kinetik energiyasi $K=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}$ ga tengdir.

Moddiy jism (figura)ning kinetik energiysini ham yuqorida qaralgan masalalarni yechishda foydalanilgan usuldan foydalanib topamiz, ya’ni berilgan jismni n ta kichik (elementar) qismlarga ajratib ularni moddiy nuqtalar sistemasi deb qaraymiz va ularni kinetik energiyalarini jamlab qandaydir funksiyaning integral yig‘indisiga ega bo‘lamiz. Unda limitga o‘tib, qiymati jismning izlanayotgan kinetik energiyasiga teng bo‘lgan aniq integralni hosil qilamiz. [5, 67]

5-misol. Massasi M va radiusi R bo‘lgan disk uning markazidan disk tekisligiga perpendikulyar bo‘lib o‘tgan o‘q atrofida ω burchak tezlik bilan aylanyapti. Uning kinetik energiyasini hisoblang.

Yechish. Diskning radiuslari $0<r_1<r_2<r_3<\dots<r_{i-1}<r_i<<r_n=R$ bo‘lgan aylanalar yordamida n ta ixtiyoriy halqalarga ajratamiz. Qalinligi $\Delta r_i=r_i-r_{i-1}\ (i=\overline{1,n})$ bo‘lgan halqani qaraymiz. Bu halqaning massasi

$$\Delta m_i = \rho\Delta s_i = \rho\pi(r_i^2 - r_{i-1}^2) = \rho\pi(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) = 2\pi\rho\frac{r_i + r_{i-1}}{2}\Delta r_i$$
$$= 2\pi\rho\overline{r_i}\Delta r_i$$

bunda $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$-diskning zichligi, $\overline{r}$ *[r_i, r_{i-1}]* kesmaning o‘rtasi. U holda

$$\Delta m_i = 2\pi\overline{r_i}\cdot\frac{M}{\pi R^2}\Delta r_i = \frac{2\overline{r_i}M}{R^2}\Delta r_i.$$

Δm_i massaning chiziqli tezligi $v_i = \overline{r_i}\omega$ ga teng. Demak elementar kinetik energiya quyidagiga teng bo‘ladi:

$$\Delta K_i = \frac{v_i^2\Delta m_i}{2} = \frac{(\overline{r_i}\omega)^2}{2}\cdot\frac{2\overline{r_i}M}{R^2}\Delta r_i = \frac{\omega^2 M}{R^2}\overline{r_i}^3\Delta r_i.$$

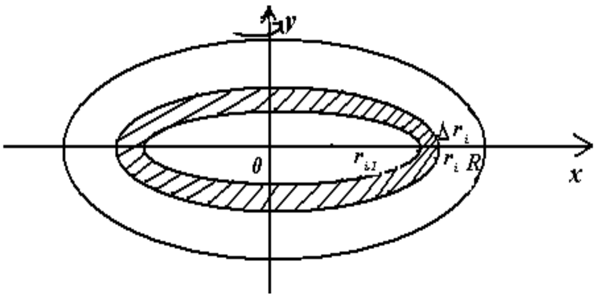
Barcha elementar kinetik energiyalarni jamlab

$$K \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{\omega^2 M}{R^2}\overline{r_i}^3\Delta r = \frac{\omega^2 M}{R^2}\sum_{i=1}^{n}\overline{r_i}^3\Delta r$$

ga ega bo‘lamiz. Bunda $max\,\Delta\, r_i \to 0$ da limitga o‘tsak

$$K = \frac{\omega^2 M}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{\omega^2 M}{R^2}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\omega^2 M R^2}{4}$$

hosil bo‘ladi.



5-chizma.

Xulosa: Fizik jarayonlarni aniq integralni hisoblashga olib kelinishi, keltirilgan funksiyalarning xossalaridan foydalanish, ifodalardagi shakl almashtirishlar va soddalashtirishlar yordamida masalaning javobini toppish uchun qadamlar ketma-ketligi muhim hisoblanadi. Mazkur fizik jarayonga yoki texnika yo‘nalishida taxsil olayotgan talabalarning o‘z mutaxassisliklariga mos turlicha kasbiy masalalariga mos matematik, fizik yoki ximik modellarni tuzish, ular ustida turlicha hisob-kitoblar olib borish, kerakli natijalar, xulosalarga ega bo‘lishda yuqorida keltirilgan bilimlarni qo‘llash maqsadga muvofiq bo‘ladi.

ADABIYOTLAR:

1. E.Xolmurodov, A.I.Yusupov, T.A.Aliqulov. Oliy matematika 2-qism. Toshkent: Vneshinvestprom 2017.

2. Н.С.Пискунов. Дифференциальное т интегральное исчисления, часть 2. Москва: Наука 1985.

3. Ibragimov S.L. Matematik modellashtirish asosida bo‘lajak muhandislarni kasbiy faoliyatga tayyorlashning ahamiyati va zaruriyati.// Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti ilmiy jurnali. 2022 1/8/1.

4. Ibragimov S.L. THE FORMATION OF STUDENTS PROFESSIONAL SKILLS WITH THE METHOD OF MATHEMATICAL MODELING. The Way of Science. International scientific journal. №2 (72), 2020. ISSN 2311-2158.

5. G.Xudoyberganov, A.Vorisov, X.MAnsurov-Matematik analiz. 1-qism. Qarshi, “Nasaf” 2003 y.

6. Abdukarimov B.A, Xakimov M.Sh. The effect of solar radiation intensity on the performance efficiency of flat solar air heaters.

7. Абдукаримов Б.А, Хакимов М.Ш. Влияние интенсивности солнечного излучения на эффективность работы плоских солнечных воздухонагревателей.

8. Abdukarimov B.A, Xakimov M.Sh. Quyosh radiatsiyasi intensivligini yassi quyosh havo isitgichlari ishlash samardorligiga tasiri.