DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.12673287

NATURAL SONLAR. ARIFMETIKANING ASOSIY TEOREMASI. BUTUN SONLAR. BO‘LUVCHILAR. YEVKLID ALGORITMI.

Nurkayev Shuhrat Jurayevich
Turin politexnika universiteti akademik litseyi oliy toifali matematika fani o‘qituvchisi.

Annotatsiya: *Ushbu maqolada Natural sonlar. Arifmetikaning asosiy teoremasi. Butun sonlar. Bo‘luvchilar. Yevklid algoritmi tushintiriladi.*

Kalit so‘zlar: *Natural, arifmetika, amallar,algorit, teorema.*

Abstract: *Natural numbers in this article. The fundamental theorem of arithmetic. Whole numbers. Dividers. The Euclidean algorithm is explained.*

Key words: *Natural, arithmetic, operations, algorithm, theorem.*

NATURAL SONLAR. ARIFMETIKANING ASOSIY TEOREMASI. BUTUN SONLAR. BO‘LUVCHILAR. YEVKLID ALGORITMI.

Natural sonning natural bo‘luvchisi. a, b- natural sonlar bo‘lsin. Agar $a = b{\cdot}c$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan natural c soni mavjud bo‘lsa, a b ga bo‘linadi yoki b a ning bo‘luvchisi deyiladi. Eslatib o‘tamiz, $a \vdots b$- a ning b ga qoldiqsiz bo‘linishini bildiradi.

Teorema 1. *$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$ - a sonining kanonik yoyilmasi bo‘lsin. U holda a sonining istalgan natural bo‘luvchisi $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.*

Isbot. $a = b{\cdot}c$ bo‘lsin, ya’ni b - a sonining bo‘luvchisi va $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ - a sonining kanonik yoyilmasi bo‘lsin. Agar $b = 1$ bo‘lsa, u holda $b = p_1^0 \cdot p_2^0 \cdot \ldots \cdot p_k^0$ bo‘ladi va teoremaning tasdig‘i o‘rinli bo‘ladi. $b > 1$ bo‘lsin. U holda $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = b{\cdot}c$ ga ega bo‘lamiz. p- b ning tub bo‘luvchisi bo‘lsin. U holda $a \vdots b$ va $b \vdots p$ bo‘lgani uchun $a \vdots p$ bo‘ladi. Demak, p -a ning tub bo‘luvchisi hisoblanadi.Shuning uchun b ning har bir p tub bo‘luvchisi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tub sonlaridan biri hisoblanadi. Shunday qilib, b ni quyidagicha yozish mumkin:

$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \ldots, 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

Natural sonning natural bo'luvchilari soni.

Teorema 2. *Agar $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ - a natural sonning kanonik yoyilmasi bo'lsa, u holda a sonining barcha natural bo'luvchilari soni quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:*

$\tau(a) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Isbot. *a* sonning har qanday *d* natural bo'luvchisi $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, bu yerda $0 \leq \beta 1 \leq \alpha 1, \ldots, 0 \leq \beta k \leq \alpha k$, (1) ko'rinishga ega bo'lgani uchun, *a* sonining barcha bo'luvchilari soni (1) shartlarni qonoatlantiruvchi barcha tartiblangan $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ to'plamlar soniga teng bo'ladi.

(1) shartlar tufayli , har bir β_i $\alpha_i + 1$ qiymatlarni, aniqrog'i $\beta_i = 0, 1, \ldots, \alpha_i$. larni qabul qiladi. Bundan tashqari, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ ning turli qiymatlarini tanlash bir-biriga bog'liq emas. Demak, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ ning barcha tartiblangan to'plamlar soni $(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.ga teng bo'ladi.

Misol 1. 12 sonining natural bo'luvchilar sonini hisoblang.
12 sonining kanonik yoyilmasi topamiz: $12 = 2^2 \cdot 3$. U holda

$$\tau(12) = (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6.$$

Shuni ham yodda tutish kerakki, *a* natural sonining barcha natural bo'luvchilari yig'indisi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

Arifmetikaning asosiy teoremasi.

Teorema 3. *Har qanday natural son – bu yo bir, yoki tub son, yoki ko'paytuvchilarning yozilish tartibi nazarga olinmaydigan tub sonlar ko'paytmasi sifatida yagona tarzda ifodalanishi mumkin.*

Isbot. Matematik induksiya metodini qo'llaymiz. *a* - qandaydir natural son bo'lsin. Agar $a = 1$ bo'lsa, teoremaning tasdig'i o'rinli bo'ladi. Faraz qilaylik, barcha b ,$b < a$ natural sonlar uchun teorema o'rinli, ya'ni yo $b = 1$, yoki *b* - tub son yoki *b* ko'paytuvchilarning yozilish tartibi nazarga olinmaydigan tub sonlar ko'paytmasi sifatida yagona tarzda ifodalansin.

a natural son uchun teoremani *a* dan kichik bo'lgan barcha natural sonlar uchun teorema o'rinli degan faraz ostida isbotlaylik.

Agar *a* tub son bo'lsa, teorema o'rinli bo'ladi. Shuning uchun *a* ni murakkab son deb hisoblaylik. U holda 1-bo'limdagi 1-teoremaga ko'ra, *a* ning eng kichik bo'luvchisi p_1 - tub son bo'ladi. Shuning uchun $a = p_1 \cdot b$ bo'ladi, bu yerda *b* - *a* dan kichik qandaydir natural son. Induksiya faraziga ko‘ra b soni uchun, teorema o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $b = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$. Demak, $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Shunday qilib, har qanday a natural son tub sonlar ko‘paytmasiga ajralishi mumkin ekan.

Ko‘paytuvchilarning yozilish tartibi nazarga olinmaydigan tub sonlar ko‘paytmasi sifatida yagona tarzda ifodalanishi mumkinligini isbotlaylik.

$a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ - a sonining tub sonlar ko‘paytmasiga yana bir yoyilmasi bo‘lsin. U holda $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ (2) bo‘ladi.

Tenglikning ikkala qismi ham p_1 ga bo‘linadi, xususan, $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ - p_1 ga bo‘linadi. $q_1, q_2, \ldots, q_m$ tub sonlar bo‘lgani uchun, shunday q_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ lar mavjudki, $q_i = p_1$ bo‘ladi. Aniqlik uchun biz $q_1 = p_1$ deb faraz qilamiz. U holda

$b = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ (3) bo‘ladi.

$b<a$ bo‘lgani uchun, induksiya faraziga ko‘ra, (3) yoyilma va demak (2) yoyilma ham ko‘paytmalarning tartibiga qadar yagonadir.

a natural sonini tub sonlar ko‘paytmasiga yoyilmasida faqat m xil tub sonlar qatnashsa va p_1 - α_1 marta, p_2 - α_2 marta va hokazo, p_m - α_m marta qatnashsa, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$$

Bunday yoyilma natural sonning kanonik yoyilmasi deyiladi.

Misol 2. $108 = 2^2 \cdot 3^3 - 108$ natural sonining kanonik yoyilmasi.

Tub va murakkab sonlar. *Qadim zamonlarda ham sonlar predmetlarni sanash va miqdorlarni o‘lchash uchun ishlatilgan. Predmetlarni sanash uchun ishlatiladigan sonlar natural sonlar deb ataladi. Shunday qilib, 1, 2, 3, . . . natural sonlardir.*

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – *natural sonlar to‘plami deyiladi.*

$a, b \in N$ *bo‘lsin. Agar* $a = b \cdot q$ *tenglik bajariladigan* $q \in N$ *mavjud bo‘lsa, u holda* a b *ga bo‘linadi deymiz va* $a \vdots b$ *deb yozamiz. Bunda* b *soni* a *sonining bo‘luvchisi deyiladi. Agar* a *soni* b *soniga bo‘linmasa,* $a \not\vdots\; b$ *deb yoziladi.*

Misol 3. $1 \vdots 1$ (bir soni faqat bitta natural bo‘luvchiga ega);

$2 \vdots 1$, $2 \vdots 2$ (2 soni faqat ikkita natural bo‘luvchiga ega).

4 soni uchta natural bo‘luvchilarga ega : 1, 2 va 4.

Faqat ikkita turli natural bo‘luvchiga ega bo‘lgan natural son tub son deyiladi. Bu ta’rifdan kelib chiqadiki, tub son faqat birga va o‘ziga bo‘linadigan birdan farqli natural sondir.

Misol 4. 2, 3, 5, 7 sonlari tub sonlarga misollar hisoblanadi.

Kamida uch xil natural bo‘luvchiga ega bo‘lgan natural sonlar murakkab sonlar deyiladi. Bu ta’riflardan kelib chiqadiki, 1- tub son ham, murakkab son ham emas. Agar a murakkab son bo‘lsa, a ning 1 va a dan boshqa hech bo‘lmaganda bitta natural bo‘luvchisi bor.

Misol 5. 4, 6, 8, 9, 10 lar murakkab sonlarga misollar hisoblanadi.

Shunday qilib, har qanday natural a soni - bir, yoki tub son yoki murakkab son ekan.

Teorema 4. *a - birdan farqli natural son va p- uning eng kichik bo‘luvchisi va, p>1bo‘lsin. U holda p- tub son bo‘ladi.*

Isbot. $a \neq 1$ bo‘lsin. Faraz qilaylik, p - tub son bo‘lmasin. U holda p - murakkab son. Demak, p ning $p_1 \neq 1$, $p_1 \neq p$ shartlarini qanoatlantiruvchi p_1 bo‘luvchisi bor. Shuning uchun, $a \vdots p$ va $p \vdots p_1$. U holda $a \vdots p_1$ va $1 < p_1 < p$. Bu p - a ning eng kichik bo‘luvchisi ekanligiga zid keladi.

Teorema 5. *Har qanday murakkab a soni $p < \sqrt{a}$ shartni qanoatlantiradigan kamida bitta p tub bo‘luvchiga ega.*

Isbot. a murakkab son bo‘lgani uchun p (eng kichik bo‘luvchi) tub son va $a = p \cdot q$ va $p \neq 1$, $q \neq 1$ bo‘ladigan q soni mavjud bo‘ladi. $p<q$ bo‘lsin. U holda $p^2 < pq = a$ bo‘ladi. Demak, $p < \sqrt{a}$.

<u>Tub sonlar to‘plamining cheksizligi.</u>

Teorema 6. *(Yevklid teoremasi). Tub sonlar to‘plami cheksiz to‘plamdir.*

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik. Tub sonlar to‘plami chekli to‘plam bo‘lsin, ya’ni $P = \{ p_1, p_2, \dots, p_k \}$ – barcha tub sonlar to‘plami bo‘lsin. $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ sonini ko‘rib chiqaylik. $a \neq 1$, $a \notin P$ va a soni $p_1, p_2, \dots, p_k$ tub sonlarning birortasiga bo‘linmaydi. a ning tub bo‘luvchilari yo‘qligi sababli, 2-teoremaga ko‘ra, a - tub sondir. Bu esa $a \notin P$ shartiga zid keladi. Shuning uchun tub sonlar to‘plami chekli to‘plam bo‘la olmaydi va shuning uchun cheksizdir.

<u>Qoldiqli bo‘lish haqidagi teorema</u>.

Teorema 7. *a va b natural sonlar bo‘lsin. U holda a sonini quyidagicha tasvirlash mumkin:*

$a = b \cdot q + r,$ (4)

bu yerda q, r – natural sonlar yoki 0 va $0 \leq r < b$.

Isbot. Matematik induksiya metodini qo‘llaymiz. $a = 1$ bo‘lsin. Ikki holatni ko‘rib chiqaylik: $b = 1$ va $b > 1$. Agar $b = 1$ bo‘lsa, u holda $1 = 1 \cdot 1 + 0$ va teorema o‘rinli. Agarda $b > 1$ bo‘lsa, u holda $1 = b \cdot 0 + 1$, ya’ni teoremaning tasdig‘i bu holatda ham o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, $a = 1$ uchun teorema o‘rinli bo‘ladi.

$a \leq k$ sonlar uchun teorema o‘rinli bo‘ladi deb faraz qilaylik. $a = k + 1$ bo‘lsin. $k = b \cdot q + r$, bu erda $0 \leq r < b$, bo‘lganligi sababli, $k + 1 = b \cdot q + r + 1$ bo‘ladi. Demak, agarda $r + 1 < b$ bo‘lsa, teorema o‘rinli bo‘ladi. . $r + 1 \geq b$ bo‘lsin. $r + 1 < k + 1$ bo‘lgani uchun, induksiya faraziga ko‘ra, $r + 1 = b \cdot q_1 + r_1$ bo‘ladi, bu erda $0 \leq r_1 < b$. Shuning uchun

$$k + 1 = b \cdot q + b \cdot q_1 + r_1 = b(q + q_1) + r_1 ,\ 0 \leq r_1 < b.$$

Demak, $a = k + 1$ soni uchun teoremaning tasdig‘i ham bajariladi. Bu esa teoremani isbotlashni yakunlaydi.

Yevklid algoritmi. a va b natural sonlar bo‘lsin. U holda yuqorida isbotlangan teoremaga ko‘ra $a = b \cdot q_0 + r_1$, $0 \leq r_1 < b$ tengligi bajariladigan q_0 va r_1 sonlar mavjud bo‘ladi.

$r_1 > 0$ bo‘lsin. Bo‘luvchi b ni qoldiq r_1 ga bo‘lamiz. U holda $b = r_1 \cdot q_1 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$ bo‘ladi. Agar $r_2 > 0$ bo‘lsa, r_1 bo‘luvchini r_2 qoldiqqa bo‘lamiz va hokazo. Quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$a = b \cdot q_0 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b,$$
$$b = r_1 \cdot q_1 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1,$$
$$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-2} + r_{n-1},\ 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2},$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n,\ 0 \leq r_n < r_{n-1},$$
$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n.$$

Shartga ko‘ra, $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n$. Shuning uchun bu bo‘linish jarayoni cheklangan miqdordagi bo‘linishdan keyin tugaydi. Shunday qilib, quyidagi qoldiqli bo‘linishlar zanjirini hosil qilamiz:

$$a = b \cdot q_0 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b,$$
$$b = r_1 \cdot q_1 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1,$$
$$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-2} + r_{n-1},\ 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2}, \quad (5)$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n,\ 0 \leq r_n < r_{n-1},$$
$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n,$$
$$r_{n+1} = 0.$$

Bu ketma-ket bo‘linish jarayoni Yevklid algoritmi deb ataladi

Misol 6. Quyidagi sonlar uchun Yevklid algoritmini tuzing:

1) $a = 9$, $b = 7$;

2) $a = 22, b = 8$.

Yechish.

1) $9 = 7 \cdot 1 + 2$,2) $22 = 8 \cdot 2 + 6$,

$7 = 2 \cdot 3 + 1$, $8 = 6 \cdot 1 + 2$,

$2 = 1 \cdot 2$. $6 = 2 \cdot 3$.

Lemma. $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$ bo‘lsin.U holda

$$EKUB(a, b) = EKUB(b, r) \text{ bo‘ladi.}$$

Isbot.

$d_1 = EKUB(a, b)$ va $d_2 = EKUB(b, r)$ bo‘lsin. U holda $a \vdots d_1$ va $b \vdots d_1$ bo‘ladi. $a = b \cdot q + r$ shartiga ko‘ra $r = a - b \cdot q$ dan $r \vdots d_1$ kelib chiqadi. U holda d_1 - b va r ning umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi va demak, $d_2 \vdots d_1$. Xuddi shunday, $b \vdots d_2$, $r \vdots d_2$ va $a = b\,q + r$ ligidan $a \vdots d_2$ kelib chiqadi. Shuning uchun $d_1 \vdots d_2$. Demak, $d_1 = d_2$. Lemma isbotlandi.

Teorema 8. *(5) - a va b natural sonlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmi bo‘lsin.U holda oxirgi noldan farqli* r_n *qoldiq a va b ning eng katta umumiy bo‘luvchisidir.*

Isbot. Yuqorida isbotlangan lemmaga ko‘ra, quyidagilarga egamiz:

$$EKUB(a, b) = EKUB(b, r_1) = EKUB(r_1, r_2) = EKUB(r_2, r_3) = \dots$$
$$= EKUB(r_{n-3}, r_{n-2}) = EKUB(r_{n-2}, r_{n-1}) = EKUB(r_{n-1}, r_n).$$

Lekin $r_{n-1} \vdots r_n$. Shuning uchun $EKUB(r_{n-1}, r_n) = r_n$ bo‘ladi. Bundan esa $EKUB(a, b) = r_n$. ekanligi kelib chiqadi.

Misol 5. Yevklid algoritmidan foydalanib, $EKUB(1067, 582)$ ni toping.

Yechish. $1067 = 582 \cdot 1 + 485$

$582 = 485 \cdot 1 + 97$

$485 = 97 \cdot 5$.

Shuning uchun $EKUB(1067, 582) = 97$.