DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.12673401

SONNING BUTUN VA KASR QISMLARI QATNASHGAN TENGLAMALAR.

Nurkayev Shuhrat Jurayevich
Turin politexnika universiteti akademik litseyi oliy toifali matematika fani o‘qituvchisi.

Annotatsiya: *Ushbu maqolada Sonning butun va kasr qismlari qatnashgan tenglamalar tushintiriladi.*

Kalit so‘zlar: *Kvadrat, ildiz, tenglama, tenglik, son.*

Abstract: *This article explains equations involving integer and fractional parts of a number.*

Key words: *Square, root, equation, equality, number.*

SONNING BUTUN VA KASR QISMLARI QATNASHGAN TENGLAMALAR.

O‘rta maktab kurslarida turli chiziqli, kvadrat va hokazo tenglamalar o‘rganilgan. Quyida tenglamaning ta’riflari va tenglamalar yechimini umumiy shaklda keltiramiz.

Ta’rif 1. *f(x) va g(x) - x ga bog‘liq biror ifodalar bo‘lsa, f(x) = g(x) ko‘rinishdagi tenglik bir noma’lum tenglama deyiladi.*

Ta’rif 2. *X to‘plamining x qiymatlarini tenglamaga qo‘yganda, to‘g‘ri sonli tenglik hosil bo‘lsa, ular berilgan tenglamaning yechimi deb ataladi va har bir bunday x qiymat tenglamaning ildizi hisoblanadi. Agar bunday to‘plam bo‘sh bo‘lsa, u holda tenglama yechimga ega emas deyiladi.*

Tenglamani yechish - bu uning barcha ildizlarini topish yoki tenglamaning yechimi yo‘qligini isbotlashni bildiradi.

Misol 1. $3x+1=x^2-1$, $5x^2-2x=0{,}25$ va $x^4-3x^2+8=0$ lar bir noma’lumli tenglamalarga misollar bo‘ladi.

Пример 2. Quyidagi tenglamalarni yeching:

a) $x^2+x-20=0$;

b) $|x|+1=x+1$;

d) $x^2 + x = -3$.

Yechish.

a) $x^2 + x - 20 = 0$ tengligi *x* faqat *4* va -*5* qiymatlarini qabul qilgandagina bajariladi. Shuning uchun *{-5; 4}* to‘plam - tenglamaning yechimi va ko‘rsatilgan sonlarning har biri tenglamaning ildizidir.

b) $|x| + 1 = x + 1$ tengligi barcha *x∈[0;+∞)* uchun bajariladi. Demak, *[0;+∞)* to‘plam tenglamaning yechimi bo‘lib, *[0;+∞)* to‘plamdagi har bir *x* qiymati tenglamaning ildizi hisoblanadi.

d) $x^2 + x = -3$ tengligi *x* ning haqiqiy qiymatlarida bajarilmaydi, shuning uchun tenglamaning (haqiqiy sonlar to‘plamida) yechimi yo‘q.

$[ax + b] = c$ **(** $a \neq 0$) **ko‘rinishdagi tenglamalarni yechish.**

[ax+b]=c tenglamani ko‘rib chiqamiz va uning yechimini qanday topishni ko‘rsatamiz. Agar c butun son bo‘lmasa, u holda tenglama yechimga ega emas. c - butun son bo‘lsin. U holda sonning butun qismi ta’rifiga ko‘ra

$c \leq ax + b < c + 1$ *ga ega bo‘lamiz.*

Bundan $a > 0$ *uchun* $\frac{c-b}{a} \leq x < \frac{c-b+1}{a}$ *ni ;* $a < 0$ *uchun* $\frac{c-b+1}{a} < x \leq \frac{c-b}{a}$ *ni hosil qilamiz.*

Misol 3. $[2x + 3] = 5$ tenglamani yeching.

Yechish. Sonning butun qismi ta’rifiga ko‘ra quyidagiga egamiz:

$$5 \leq 2x + 3 < 6,$$

Bu tengsizliklarni yechib,

$2 \leq 2x < 3$ ni hosil qilamiz.

yoki

$$1 \leq x < 1{,}5.$$

Javob: $x \in [1; 1{,}5)$.

$[ax^2 + bx + c] = d$ $(a \neq 0)$ **ko‘rinishdagi tenglamalarni yechish.**

Agar d butun son bo‘lmasa, u holda tenglama yechimga ega bo‘lmaydi. d – butun son bo‘lsin. U holda

$d \leq ax^2 + bx + c < d + 1$ *ga ega bo‘lamiz.*

So‘ngra quyidagi tengsizliklar sistemasini yechib:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \geq d \\ ax^2 + bx + c < d + 1 \end{cases}$$

berilgan tenglamaning yechimlarini hosil qilamiz.

Misol 4. $[2x^2 - 5x + 3] = 2{,}5$ tenglamani yeching.

Yechish. 2,5 – butun son bo‘lmagani uchun tenglama yechimga ega emas.

Javob: Ø.

Misol 5. $[x^2 + x] = 1$ tenglamani yeching.

Yechish. Sonning butun qismi ta'rifiga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$\begin{cases} x^2 + x \geq 1 \\ x^2 + x < 2\,. \end{cases}$$

Dastlab $x^2 + x - 1 = 0$ va $x^2 + x - 2 = 0$ kvadrat tenglamalarni yechib, mos $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ va $x_3 = 1,\ x_4 = -2$ yechimlarini hosil qilamiz. So'ngra tengsizliklar sistemasi uchun oraliqlar usulini qo'llab, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right) \\ x \in (-2; 1) \end{cases}$$

Oraliqlarni kesishtirib, $x \in \left(-2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1\right)$ ko'rinishdagi javobni hosil qilamiz.

$\{ax + b\} = c$ ($a \neq 0$) **ko'rinishdagi tenglamalarni yechish.**

Agar $\boldsymbol{c} < 0$ *yoki* $c \geq 1$ *bo'lsa, u holda tenglama yechimga ega bo'lmaydi. Agarda* $c \in [0; 1)$ *bo'lsa, u holda* $ax + b = c + n,\ n \in Z$ *larga ega bo'lamiz. Bundan*

$$x = \frac{c+n-b}{a}\ ,\ n \in Z \text{ kelib chiqadi.}$$

Misol 6. $\{3x - 5\} = 4$ tenglamani yeching.

Yechish. $4 \geq 1$ bo'lgani uchun berilgan tenglama yechimga ega emas.

Misol 7. $\{2x + 5\} = 0{,}4$ tenglamani yeching.

Yechish. Sonning kasr qismi ta'rifiga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$2x + 5 = 0{,}4 + n, n \in Z,$$

Bundan

$$x = -2{,}3 + \frac{n}{2},\ n \in Z \text{ ni hosil qilamiz.}$$

Misol 8. $[x] + [2x] + [3x] = 4$ tenglamani yeching.

Yechish. Avval $x \leq 0$ bo'lsin. U holda $[x] \leq 0$, $[2x] \leq 0, [3x] \leq 0$ larni hosil qilamiz. Bu tengsizliklarni qo'shib, $[x] + [2x] + [3x] \leq 0$ ni hosil qilamiz. Shuning uchun $x \leq 0$ bo'lganda berilgan trnglama yechimga ega bo'lmaydi.

$x > 0$ bo'lsin. U holda $[x] \leq [2x] \leq [3x]$ ga ega bo'lamiz. Bunday holda, berilgan tenglama quyidagi to'rtta tenglamalar sistemasining birlashmasiga teng kuchlidir:

$$\text{a)} \begin{cases} [x] = 0, \\ [2x] = 0, \\ [3x] = 4; \end{cases} \text{b)} \begin{cases} [x] = 0, \\ [2x] = 1, \\ [3x] = 3; \end{cases} \text{d)} \begin{cases} [x] = 0, \\ [2x] = 2, \\ [3x] = 2; \end{cases} \text{e)} \begin{cases} [x] = 1, \\ [2x] = 1, \\ [3x] = 2. \end{cases}$$

Har bir sistemani alohida yechib olamiz:

a) $\begin{cases}[x]=0,\\ [2x]=0,\\ [3x]=4,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<1,\\ 0\le 2x<1,\\ 4\le 3x<5,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<1,\\ 0\le x<\frac{1}{2},\\ \frac{4}{3}\le x<\frac{5}{3},\end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$

b) $\begin{cases}[x]=0,\\ [2x]=1,\\ [3x]=3,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<1\\ 1\le 2x<2\\ 3\le 3x<4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<1\\ \frac{1}{2}\le x<1\\ 1\le x<\frac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$

d) $\begin{cases}[x]=0,\\ [2x]=2,\\ [3x]=2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<1\\ 2\le 2x<3\\ 2\le 3x<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<1\\ 1\le x<\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3}\le x<1\end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$

e) $\begin{cases}[x]=1,\\ [2x]=1,\\ [3x]=2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\le x<2\\ 1\le 2x<2\\ 2\le 3x<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\le x<2\\ \frac{1}{2}\le x<1\\ \frac{2}{3}\le x<1\end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$

Shunday qilib, $[x]+[2x]+[3x] \ = \ 4$ tenglama yechimga ega emas.