DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.12673424

TAQQOSLAMALAR VA ULARNING XOSSALARI. RATSIONAL VA IRRATSIONAL SONLAR.

Nurkayev Shuhrat Jurayevich
Turin politexnika universiteti akademik litseyi oliy toifali matematika fani o‘qituvchisi.

Annotatsiya: *Ushbu maqolada Taqqoslamalar va ularning xossalari. Ratsional va irratsional sonlar tushintiriladi.*

Kalit so‘zlar: *Ratsional, son, isbot, butun, teorema.*

Abstract: *In this article, Comparisons and their properties. Rational and irrational numbers are explained.*

Key words: *Rational, number, proof, whole, theorem.*

TAQQOSLAMALAR VA ULARNING XOSSALARI. RATSIONAL VA IRRATSIONAL SONLAR.

Taqqoslamalar. ***a*** *va* ***b*** *- butun sonlar va* ***m*** *1 dan katta natural son bo‘lsin. Agar* ***a - b m*** *ga bo‘linsa, u holda* ***a*** *soni* ***b*** *soniga* ***m*** *modul bo‘yicha taqqoslanadigan son deyiladi va* $a \equiv b \ (mod\ m)$ *kabi yoziladi.*

Misol 1. $a = 5, b = 16, m = 11$ berilgan bo‘lsin. U holda $5 - 16 = -11$ va $-11 \vdots 11$ bo‘ladi. Shuning uchun $5 \equiv 16\ (mod\ 11)$ munosabatni yozish mumkin.

Xuddi shunday, $6 \equiv 17\ (mod\ 11)$ yozish mumkin.

Teorema 1. *Agar* $a, b \in N$, $a \equiv b\ (mod\ m)$ *bo‘lsa,* a *va* b *sonlar* m *soniga bo‘linganda bir xil qoldiqni beradi.*

Isbot. Aniqlik uchun $a \geq b$ bo‘lsin. $a \equiv b\ (mod\ m)$ munosabati $(a - b) \vdots m$ ekanini bildiradi. Boshqacha qilib aytganda, $a - b = m \cdot q$ bo‘ladigan q soni mavjud bo‘ladi. Demak, $a = m \cdot q + b$.

$b = m \cdot q' + r$, $0 \leq r < m$ bo‘lsin. U holda

$$a = m \cdot q + m \cdot q' + r = m \cdot (q + q') + r, 0 \leq r < m \text{ bo‘ladi.}$$

Shunday qilib, a va b sonlari m soniga bo‘linganda bir xil r qoldiqni beradi.

Teorema 2. *Agar a va b natural sonlari 1 dan katta m soniga bo'linganda, bir xil qoldiq hosil bo'lsa, u holda $a \equiv b \ (mod\ m)$ bo'ladi.*

Isbot. Shartga ko'ra $a = m \cdot q + r$, $0 \le r < m$ va $b = m \cdot q' + r$, $0 \le r < m$. U holda $a - b = (m \cdot q + r) - (m \cdot q' + r) = m \cdot q - m \cdot q' = m \cdot (q - q')$.

Demak, $a - b = m \cdot (q - q')$. Bundan $a \equiv b \ (mod\ m)$ kelib chiqadi.

Taqqoslamaning xossalari. m 1 dan katta butun son bo'lsin. Taqqoslama munosabati quyidagi xossalarga ega:

1^0. Har qanday a va m, $m > 1$ butun sonlar uchun $a \equiv a \ (mod\ m)$.

Isbot. $a - a = 0$ va $0 \vdots m$. Bundan $a \equiv a \ (mod\ m)$ kelib chiqadi.

2^0. Agar a va b butun sonlar uchun $a \equiv b \ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $b \equiv a \ (mod\ m)$ bo'ladi.

Isbot. $a \equiv b \ (modm)$ berilgan. Demak, $(a - b) \vdots m$ bo'ladi. U holda $(a - b) \vdots m$ yoki $(b - a) \vdots m$ bo'ladi. Bundan $b \equiv a \ (mod\ m)$ ligi kelib chiqadi.

3^0. Agar $a \equiv b \ (mod\ m)$ va $b \equiv c \ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $a \equiv c \ (mod\ m)$ bo'ladi.

Isbot. $a \equiv b \ (mod\ m)$ va $b \equiv c \ (modm)$ berilgan bo'lsin. U holda $(a - b) \vdots m$ va $(b - c) \vdots m$ bo'ladi. Bundan $((a - b) + (b - c)) \vdots m$ yoki $(a - c) \vdots m$ ligi kelib chiqadi. Bu esa $a \equiv c \ (mod\ m)$ ligini bildiradi.

4^0. Taqqoslamalarni hadma-had qo'shish va ayirish mumkin, ya'ni agar $a \equiv b \ (mod\ m)$ va $c \equiv d \ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$ va $a - c \equiv b - d \ (mod\ m)$ bo'ladi.

Isbot. Shartga ko'ra $(a - b) \vdots m$ va $(c - d) \vdots m$. U holda $((a - b) + (c - d)) \vdots m$ yoki $((a + c) - (b + d)) \vdots m$ larni hosil qilamiz. Bu esa $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$ ligini bildiradi.

Qaralayotgan xossaning ikkinchi qismi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

5^0. Agar $a \equiv b \ (mod\ m)$ va $c \equiv d \ (mod\ m)$ bo'lsa, u holda $a \cdot c \equiv b \cdot d \ (modm)$ bo'ladi, ya'ni taqqoslamalarni hadma-had ko'paytirish mumkin.

Isbot. Shartga ko'ra $(a - b) \vdots m$ va $(c - d) \vdots m$. Quyidagi tengliklar o'rinli:
$a \cdot c - b \cdot d = a \cdot c - c \cdot b + c \cdot b - b \cdot d = c \cdot (a - b) + b \cdot (c - d)$.

$(a - b) \vdots m$, $(c - d) \vdots m$ bo'lgani uchun, $(c \cdot (a - b) + b \cdot (c - d)) \vdots m$ ni hosil qilamiz. Boshqacha aytganda, $(a \cdot c - b \cdot d) \vdots m$ yoki $a \cdot c \equiv b \cdot d \ (mod\ m)$ bo'ladi.

6^0. Taqqoslamaning ikkala tomonini har qanday butun songa ko'paytirish mumkin. Bunda taqqoslama saqlanadi.

Isbot. Shartga ko'ra $a \equiv b \ (mod\ m)$. 1^0 – xossaga asosan $c \equiv c \ (mod\ m)$ ni hosil qilamiz. U holda 5^0 -xossaga asosan $a \cdot c \equiv b \cdot c \ (mod\ m)$ ni hosil qilamiz.

Taqqoslama munosabatining bo'linish alomatlarini isbotlashda qo'llanilishi.

Ma'lumki, har bir natural sonni *0, 1, 2, . . . , 9* - to'qqizta raqamlar yordamida yozish mumkin. Masalan, *327 sonini 300 + 20 + 7* yoki $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7$ ko'rinishda yozish mumkin, ya'ni $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$.

Bundan keyin $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ raqamlaridan tuzilgan $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ natural sonni $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sonlar ko'paytmasidan farqlash uchun $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ ko'rinishda tasvirlaymiz.

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ yig'indi $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$. soninig o'nli yoyilmasi deb ataladi.

1^0. 2 ga bo'linish alomati.

***Teorema 3**. Natural a soni 2 ga bo'linadi, agarda u juft raqami bilan tugasa.*

Isbot. $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 - a$ soning o'nli yoyilmasi bo'lsin. $10^n, 10^{n-1}, \dots, 10$ sonlari 2 ga bo'lingani uchun, *a* ning *2* ga bo'linishi uchun a_0 ning *2* ga bo'linishi zarur va yetarli bo'ladi. Demak, a_0 - oxirgi raqam *0, 2, 4, 6* yoki *8* qiymatlarni qabul qiladi.

2^0. 3 ga bo'linish alomati.

***Teorема 4.** Natural a soni 3 ga bo'linadi, agarda raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadigan sonni tashkil etsa.*

Isbot. Quyidagi taqqoslamalarni qaraylik:

$$1 \equiv 1 \pmod 3$$

$$\left.\begin{array}{l} 10 \equiv 1 \pmod 3 \\ 10^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 10^n \equiv 1 \pmod 3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

U holda

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \equiv a_0 \pmod 3 \\ a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \pmod 3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod 3 \\ a_n \cdot 10^n \equiv a_n \pmod 3 \end{array}\right\} \quad (2)$$

(2) taqqoslamalarni hadma-had qo'shib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod 3.$$

Hosil qilingan taqqoslamaning chap tomoni a soniga teng, o'ng tomoni a sonini tashkil etuvchi raqamlar yig'indisidan iborat. U holda 1, 2 teoremalardan *a ⋮ 3 bo'ladi*, faqat va faqat shu holdaki, agar a sonini tashkil etuvchi raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linsa.

3^0. 4 ga bo'linish alomati.

Teorema 5. *Agar berilgan sonning oxirgi ikki raqamidan hosil bo'lgan son 4 ga bo'linsa, a natural soni ham 4 ga bo'linadi.*

Isbot. $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 - a$ natural sonining o'nli yoyilmasi bo'lsin. Quyidagi taqqoslamalarni qaraylik:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 10 \equiv 10 \ (mod\ 4) \\ 10^2 \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10^n \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{array}\right\} \quad (3)$$

Bu taqqoslamalarning ikkala tomonini mos ravishda $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sonlariga ko'paytirib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \equiv a_0 \ (mod\ 4) \\ a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \cdot 10 \ (mod\ 4) \\ a_2 \cdot 10^2 \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ a_n \cdot 10^n \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{array}\right\} \quad (4)$$

(4) taqqoslamalarni hadma-had qo'shib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_1 \cdot 10 + a_0 \ (mod\ 4)$$

yoki $a \equiv \overline{a_1 a_0}$ *(mod 4)*. Bundan esa 1 va 2 teoremalarga ko'ra, 5-teoremaning isbotini hosil qilamiz.

4^0. ***5 ga bo'linish alomati.***

Teorema 6. *Natural a soni 5 ga bo'linadi, agarda uning oxiri 0 yoki 5 raqami bilan tugasa.*

Isbot. Quyidagi taqqoslamalarni qaraylik:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 \equiv 0 \ (mod\ 5)$ и $a_0 \equiv a_0 \ (mod\ 5)$. Ularni hadma-had qo'shib, quyidagi taqqoslamani hosil qilamiz:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_0 \ (mod\ 5)\ .$$

Demak, son *5* ga faqat va faqat shu holda bo'linadiki, agarda berilgan sonning oxirgi raqami *5* ga bo'linsa. Biroq barcha raqamlar orasida faqat *0* va *5* gina *5* ga bo'linadi.

5^0. ***6 ga bo'linish alomati.***

Teorema 7. *Agar natural soni ham 2 ga, ham 3 ga bo'linsa, u 6 ga bo'linadi. Aksincha, agar natural son 6 ga bo'linsa, u 2 ga va 3 ga bo'linadi.*

Isbot. *a* natural soni ham *2* ga, ham *3* ga bo'linsin. U holda *2* va *3* lar o'zaro tub sonlar bo'lgani uchun *a* soni ularning ko'paytmasiga ham bo'linadi, ya'ni $a \,\vdots\, 6$.

Aksincha, agar $a \vdots 6$ bo‘lsa, u holda shunday q butun soni mavjudki, $a = 6 \cdot q$ bo‘ladi. Ravshanki, $(6 \cdot q) \vdots 2$ va $(6 \cdot q) \vdots 3$. Shuning uchun a soni 2 ga ham, 3 ga ham bo‘linadi.

6^0. **8 ga bo‘linish alomati.**

Теорема 8. *Agar a natural sonining oxirgi uchta raqamidan hosil bo‘lgan son 8 ga bo‘linsa, a natural soni ham 8 ga bo‘linadi.*

Isbot. $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 - a$ natural sonining o‘nli yoyilmasi bo‘lsin.

$1000 \equiv 0 \pmod 8$ taqqoslama o‘rinli. Demak, $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 \equiv 0 \pmod 8$. Bundan quyidagi taqqoslamani hosil qilamiz:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod 8.$$

Shuning uchun, $a \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod 8$ bo‘ladi. Shunday qilib, a soni 8 ga bo‘linadi faqat va faqat shu holdaki, agarda $\overline{a_2 a_1 a_0}$ son 8 ga bo‘linsa.

Shunga o‘xshash, quyidagi bo‘linish alomatlarini isbotlash mumkin.

7^0. **9 ga bo‘linish alomati.**

Теорема 9. *Natural a soni 9 ga bo‘linadi, agarda raqamlari yig‘indisi 9 ga bo‘linadigan sonni tashkil etsa.*

8^0. **10 ga bo‘linish alomati.**

Теорема 10*. Natural a soni 10 ga bo‘linadi, agarda uning oxiri 0 raqami bilan tugasa.*

9^0. **11 ga bo‘linish alomati.**

Teorema 11*. Natural a soni 11 ga bo‘linadi, agar toq o‘rindagi raqamlar yig‘indisi bilan juft o‘rindagi raqamlar yig‘indisining ayirmasi 11 ga bo‘linsa.*

Misol 1. *1031305* soni *11* ga bo‘linadi.

Haqiqatdan, toq o‘rindagi raqamlari yig‘indisi $1 + 3 + 3 + 5 = 12$ ga teng, juft o‘rindagi raqamlari yig‘indisi esa $0 + 1 + 0 = 1$ ga teng. Ularning ayirmasi
$12 - 1 = 11 - 11$ga bo‘linadi.

Misol 2. *132582* soni *3* ga bo‘linadi, lekin *9* ga bo‘linmaydi.

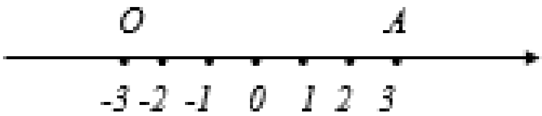
Haqiqatdan, berilgan sonning raqamlari yig‘indisi $1 + 3 + 2 + 5 + 8 + 2 = 21$. *21* soni *3* ga bo‘linadi, lekin *9* ga bo‘linmaydi. Shuning uchun *132582* soni *3* ga bo‘linadi, lekin *9* ga bo‘linmaydi.

Butun sonlar. *Natural sonlar to‘plamiga 0 sonini qo‘shib, biz* $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *to‘plamini olamiz - bu barcha manfiy bo‘lmagan butun sonlar to‘plami deb ataladi.* N_0 *to‘plamni natural sonlarga qarama-qarshi bo‘lgan barcha sonlarni qo‘shish orqali kengaytiramiz. Natijada quyidagi to‘plamni hosil qilamiz:*

$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Bu to‘plam barcha butun sonlar to‘plami deb ataladi va Z bilan belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan butun sonlarni to‘g‘ri chiziqda quyidagicha ifodalash mumkin. Biror *l* to‘g‘ri chiziqda biz *O* nuqtani ixtiyoriy tanlaymiz va uni "boshlang‘ich" nuqta deb ataymiz. *O* nuqtadan *l* chiziqning o‘ngdagi yo‘nalishini musbat va *O* nuqtadan *l* chiziqning chap tomonidagi yo‘nalishni manfiy demiz. *O* nuqtaning o‘ng tomonida biror *A* nuqtani ham belgilaymiz va *OA* kesmani birlik kesma deb ataymiz. To‘g‘ri chiziqdagi butun sonlarni quyidagicha belgilaymiz: musbat *n* sonni belgilash uchun *O* nuqtadan *n* marta musbat yo‘nalishda *OA* kesmani qo‘yamiz. Hosil bo‘lgan kesmaning o‘ng uchi *n* soniga to‘g‘ri keladi. – *n* sonini belgilash uchun *O* nuqtadan manfiy yo‘nalishda *OA* kesmani *n* marta qo‘yamiz. Hosil bo‘lgan kesmaning chap uchi - *n* soniga to‘g‘ri keladi. *0* sonini *O* nuqta bilan mos qo‘yamiz. Natijada barcha butun sonlar belgilangan to‘g‘ri chiziqni hosil qilamiz.



Boshlang‘ich nuqtasi, musbat yo‘nalish va birlik kesmalar tanlangan chiziq sonlar o‘qi deyiladi.

Ratsional sonlar. $\frac{p}{q}$ *, p - butun son, q - natural son, qisqarmaydigan kasr ko‘rinishda ifodalanishi mumkin bo‘lgan sonlarga ratsional sonlar deyiladi. Musbat ratsional son* $\frac{m}{n}$*, m va n- natural sonlar, sonlar o‘qida C nuqta bilan ifodalanishi mumkin, uni quyidagicha hosil qilamiz: OA kesmani n ta teng qismlarga bo‘lamiz, so‘ngra sonlar o‘qining musbat yo‘nalishida O nuqtadan m ta shunday qismlarni ajratamiz. Oxirgi kesmaning o‘ng uchi* $\frac{m}{n}$ *soniga to‘g‘ri keladi. Xuddi shunday,* $-\frac{m}{n}$ *manfiy ratsional sonni tasvirlash mumkin, O nuqtadan m marta chapga uzunligi* $\frac{1}{n}$ *bo‘lgan kesmani qo‘yish kerak.*

Shunday qilib, sonlar o‘qidadagi har bir ratsional soniga yagona nuqta mos kelar ekan.

$\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ ratsional sonlari teng hisoblanadi, agarda $a \cdot d = b \cdot c$ bo‘lsa.

Haqiqatdan, agar $a \cdot d = b \cdot c$ bo‘lsa, u holda $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c}{d}$ bo‘ladi.

Ratsional sonlar to‘plamida qo‘shish, ko‘paytirish, ayirish va bo‘lish (nolga bo‘lishdan tashqari) amallarini bajarish mumkin. Ushbu amallar qanday aniqlanishini eslatamiz:

1. $\frac{m}{n}$ va $\frac{k}{l}$ ratsional sonlar yig‘indisi quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$\frac{m}{n}+\frac{k}{l}=\frac{m\cdot l+n\cdot k}{n\cdot l},$$

2. $\frac{m}{n}$ va $\frac{k}{l}$ ratsional sonlar ko‘paytmasi quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}=\frac{m\cdot k}{n\cdot l}.$$

Misol 3. $\frac{3\diagup 1}{4}+\frac{4\diagup 1}{3}=\frac{3+4}{12}=\frac{7}{12}$.

Misol 4. $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

Qo‘shish va ko‘paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1. $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}=\frac{k}{l}+\frac{m}{n}$ - qo‘shishning kommutativlik qonuni.

2. $(\frac{m}{n}+\frac{k}{l})+\frac{p}{q}=\frac{m}{n}+(\frac{k}{l}+\frac{p}{q})$ - qo‘shishning assotsiativlik qonuni.

3. $\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}=\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n}$ - ko‘paytirishning kommutativlik qonuni..

4. $\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{k}{l}\cdot\frac{p}{q}\right)$ - ko‘paytirishning assotsiativlik qonuni.

5. $\left(\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{k}{l}\cdot\frac{p}{q}$ – qo‘shishga nisbatan ko‘paytirishning distributivlik qonuni.

Ratsional sonlarni ayirish amali quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$\frac{m}{n}-\frac{k}{l}=\frac{m\cdot l-n\cdot k}{n\cdot l}.$$

$\frac{m}{n}$ ratsional sonini $\frac{k}{l}$ ratsional soniga bo‘lish amali quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{m}{n}:\frac{k}{l}=\frac{m\cdot l}{n\cdot k},\ \text{bu yerda } k\neq 0.$$

Misol 5. $\frac{7/2}{5}-\frac{5/1}{7}=\frac{14-5}{35}=\frac{9}{35}$.

Misol 6. $\frac{7}{11}:\frac{15}{23}=\frac{7\cdot 23}{11\cdot 15}=\frac{161}{165}$.

O‘nli kasrlar. *$\frac{p}{q}$, $q\neq 0$ ko‘rinishdagi har qanday kasr, bu yerda p va q butun sonlar, oddiy kasr deyiladi. $\pm a_0,a_1\, a_2\, a_3\ldots$ ko‘rinishdagi har qanday son o‘nli kasr deyiladi,bu yerda $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ - qandaydir raqamlar. Agar o‘nli kasr yozuvida chekli sonli raqamlar ishtirok etsa, masalan, 2,3454, u holda u chekli o‘nli kasr deyiladi.*

Aks holda, o‘nli kasr cheksiz deyiladi. O‘nli kasr yozuvida verguldan keyin ma’lum bir raqam yoki raqamlar guruhi cheksiz ko‘p marta takrorlanadigan o‘nli kasr *cheksiz davriy o'nli kasr deyiladi. Bunda, takrorlanuvchi raqam yoki raqamlar guruhi cheksiz davriy o'nli kasrninng davri deb ataladi. Agar cheksiz o'nli kasr yozuvida takrorlanuvchi raqam yoki raqamlar guruhi bo'lmasa, bunday o'nli kasr cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr deyiladi.*

$\frac{p}{q}$ ratsional sonini o'nli kasr ko'rinishiga keltirish uchun kasrning suratini uning maxrajiga bo'lish kerak. Natijada biz chekli yoki cheksiz o'nli kasrni hosil qilamiz.

Misol 7. $\frac{5}{8}$ sonini o'nli kasr ko'rinishiga keltiring.

Misol 8. $\frac{5}{7}$ va $\frac{17}{22}$ sonlarini o'nli kasr ko'rinishiga keltiring.

Quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$\frac{5}{8} = 0{,}625 = 0{,}625000\ldots$

$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285\ldots$

$\frac{17}{22} = 0{,}77272\ldots.$

7-misolda biz chekli o'nli kasrni hosil qildik. Belgilab o'tamizki, uni davri *0* ga teng bo'lgan cheksiz davriy o'nli kasr sifatida ham qarash mumkin. 8-misolda davri mos ravishda *714285* va *72* larga teng cheksiz davriy o'nli kasrlarni hosil qildik.

Agar davri verguldan so'ng birdan boshlansa (masalan *0,714285714285. . .*), u holda uni sof davriy kasr deb ataymiz. Aks holda (masalan, *0,77272. . .*), aralash davriy kasr deb ataymiz.

Teorema 12. *$\frac{p}{q}$ - musbat q maxrajli qisqarmas kasr bo'lsin. q ning kanonik yoyilmasi faqat 2 va 5 sonlarning darajalaridan iborat bo'lsin, ya'ni $q = 2^s \cdot 5^t$, bu yerda $s, t \in N_0$. U holda $\frac{p}{q}$ ni chekli o'nli kasr ko'rinishda tasvirlash mumkin.*

Isbot. Haqiqatdan,

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^s \cdot 5^t} = \frac{p \cdot 2^t \cdot 5^s}{2^{s+t} \cdot 5^{t+s}} = \frac{p \cdot 2^t \cdot 5^s}{10^{s+t}} \text{ - chekli o'nli kasr.}$$

Butun *p* sonni *q* natural soniga bo'lishda har bir bo'linish bosqichi o'zining qoldig'iga keltiriladi. Bu qoldiqlar qanchalik turlicha bo'lmasin, ularning hech biri *q* dan katta bo'lishi mumkin emas. Shuning uchun, ma'lum bir qadamdan so'ng, qoldiqlar takrorlana boshlaydi va bu bo'linmaning davriyligiga olib keladi. Shuning uchun, *q* ga bo'lishda, davriy o'nli kasrni hosil qilamiz. Shunday qilib, har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son cheksiz davriy o'nli kasr sifatida ifodalanishi mumkin.

Teskari tasdiq ham o‘rinli: har qanday davriy o‘nli kasr oddiy kasr sifatida ifodalanishi mumkin, boshqacha aytganda, har qanday davriy o‘nli kasr ratsional sondir.

Misol 9. *0,231231. . .* davriy o‘nli kasrni oddiy kasr ko‘rinishida tasvirlang.

Yechish. Berilgan davriy o‘nli kasrni *x* orqali belgilaylik, ya’ni

$$x = 0{,}231231... \quad (5)$$

Bu son *231* ga teng davrga ega. (5) ning ikkala tomonini *1000* ga ko‘paytirib, quyidagini hosil qilamiz

$$1000x = 231{,}231231... \quad (6)$$

(6) va (5) tengliklarni hadma-had ayirib, quyidagini hosil qilamiz

$$999x = 231.$$

Bundan esa $x = \frac{231}{999}$ ga ega bo‘lamiz.

Misol 10. *3,73232 . . .* aralash davriy kasrni oddiy kasrga keltiring.

Yechish. $x = 3{,}73232...$ bo‘lsin. U holda

$10x = 37{,}3232...$ (7)

$1000x = 3732{,}3232...$ (8)

(8) dan (7) tenglikni ayirib, $990x = 3695$ ni hosil qilamiz. Bundan

$$x = \frac{3695}{990} = 3\frac{725}{990}.$$

Davriy o‘nli kasrlarni oddiy kasrlarga keltirishning boshqa usullari ham mavjud.

Misol 11. *12,73535 . . .* вni oddiy kasrga keltiring.

Yechish.

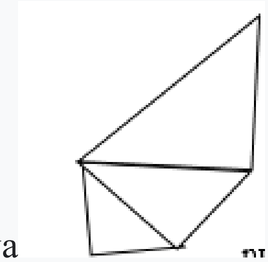
$$12{,}73535... = \frac{127{,}3535...}{10} = \frac{127+0{,}3535...}{10} = \frac{127+\frac{35}{99}}{10} = \frac{127\cdot 99+35}{990} = \frac{12608}{990}.$$

<u>Irratsional sonlar.</u> Oldingi bo‘limda biz har bir ratsional son sonlar o‘qidagi bitta nuqtaga mos kelishini ko‘rsatdik. Teskari masala qiziq, ya’ni: sonlar o‘qining har bir nuqtasiga ma’lum bir ratsional son mos keladimi? Ma’lum bo‘lishicha, sonlar o‘qida ratsional sonlarga mos kelmaydigan nuqtalar ham mavjud.

Teorema 13. *p- tub son bo‘lsin. U holda kvadrati p ga teng bo‘lgan ratsional son mavjud emas.*

Faraz qilaylik, $\frac{m^2}{n^2} = p$, $EKUB(m, n) = 1$ bo‘ladigan $\frac{m}{n}$ ratsional soni mavjud bo‘lsin. U holda $m^2 = p \cdot n^2$ bo‘ladi. Demak, $m^2 \vdots p$. Bundan $m \vdots p$ ni hosil qilamiz. Demak, $m = p \cdot q$ va $p \cdot n^2 = p^2 \cdot q^2$ bo‘ladigan q butun soni mavjud. Hosil bo‘lgan tenglikning ikkala tomonini p ga qisqartirib, $n^2 = p \cdot q^2$ ni hosil qilamiz. U holda $n^2 \vdots p$ bo‘ladi, ya’ni $n \vdots p$. Shunday qilib, p - m va n sonlarning umumiy bo‘luvchisi ekan. Bu esa $EKUB(m, n) = 1$ shartiga ziddir.

Xulosa. *$\sqrt{p}$ ko'rinishidagi sonlar, bu yerda p – tub son, ratsional son hisoblanmaydi.*

Tub sonlar to'plami cheksizdir. Shuning uchun $\sqrt{p}$ ko'rinishdagi ratsional bo'lmagan cheksiz sonlar to'plami mavjud. Geometrik jihatdan $\sqrt{p}$ uzunlikdagi kesmalarni quyidagicha ifodalash mumkin. Tekslikda katetlari uzunligi *1* bo'lgan teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak quramiz. Unda bu uchburchak gipotenuzasining uzunligi $\sqrt{2}$ ga teng bo'ladi. $\sqrt{2}$ soni ratsional son emas. Endi katetlari uzunligi $\sqrt{2}$ va *1* bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak yasaymiz. Bunday uchburchak gipotenuzasining uzunligi $\sqrt{3}$ ga teng bo'ladi va  hokazo. Shunday qilib, har qanday *p* tub son uchun uzunligi $\sqrt{p}$ ga teng bo'lgan kesmani qurish mumkin ekan.

Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, ratsional sonlarning o'ziga xos xususiyati shundaki, ularni davriy o'nli kasrlar sifatida ifodalash mumkin. Sonlar o'qidagi ratsional sonning tasviri bo'lmagan nuqtalarga irratsional sonlar deb ataladigan cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar mos keladi. Masalan, cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar: $\sqrt{2}$ = *1,4142. . .* , π = *3,1415. . .* – irratsional sonlar hisoblanadi.

Barcha ratsional va irratsional sonlar to'plami, ta'rifiga ko'ra, haqiqiy sonlar to'plamini tashkil qiladi. Shunday qilib, barcha haqiqiy sonlar to'plami barcha davriy o'nli kasrlardan va barcha cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlardan iborat ekan.

Irratsional sonlarni taqqoslash. ***π soni.***

Agar *AB* kesma *CD* kesmani butun songa teng marta qoplasa *AB* kesma *CD* kesmaning o'lchovi deb ataladi. *AB* kesma *CD* va *EF* kesmalari uchun umumiy o'lchov deb ataladi, agar *AB* ikkala kesma uchun ham o'lchov bo'lsa.

Misol 12. Rasmda *CD* va *EF* kesmalari uchun umumiy o'lchov hisoblanadigan *AB* kesma tasvirlangan.

A ●——●*B* *C*●——●——●*D* *EF* ●——●——●——●

12-misolda o'lchov birligi sifatida *AB* kesmani olamiz, uning uzunligini | *AB* | bilan belgilaymiz va *1* ga tenglaymiz. U holda | *CD* | = *2,* | *EF* | = *3* bo'ladi va bu kesmalar uzunliklarining nisbati $\frac{|EF|}{|CD|} = \frac{3}{2}$ ratsional son bilan ifodalanadi.

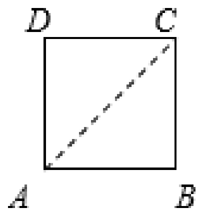
Umumiy o'lchovga ega bo'lgan kesmalarni mutanosib, aks holda nomutanosib deb ataymiz.

CD va *EF* mutanosib kesmalar va *AB* kesma ularning o‘lchovi bo‘lsin. Faraz qilaylik, *AB* kesma *CD* va *EF* kesmalarida mos ravishda n va m marta yotadi. U holda *EF* va *CD* kesmalari uzunliklarining nisbati $\frac{m}{n}$ ratsional son bilan ifodalanadi.

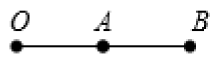
Shuning uchun mutanosib kesmalar uzunliklarining nisbati har doim ratsional sondir. Ammo barcha kesmalar ham mutanosib hisoblanavermaydi.

Misol 13. Har qanday kvadratning diagonali uning tomoniga mutonosib emas.

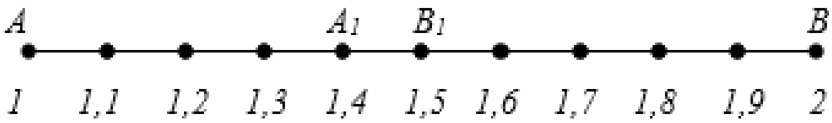
Haqiqatdan, aks holda *AC* va *AB* kesma uzunliklarining nisbati ratsional son bo‘lgan bo‘lar edi. Lekin $AC^2 = 2AB^2$ bo‘lgani uchun $\frac{|AC|}{|AB|} = \sqrt{2}$ bo‘ladi. Ma’lumki $\sqrt{2}$ ratsional son hisoblanmaydi. Shuning uchun *AC* va *AB* kesmalar mutanosib emas.



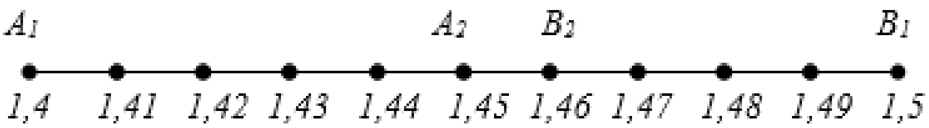
Har bir ratsional son davriy o‘nli kasr bilan ifodalanganligi va 1-bandda isbotlangan teoremadan kelib chiqadiki, $\sqrt{2}$ ratsional son emas, demak, $\sqrt{2}$ davriy o‘nli kasr bilan ifodalanmaydi. Misol sifatida $\sqrt{2}$ sonidan foydalanib, biz irratsional sonlarni o‘nli kasrlar sifatida qanday tasvirlashni ko‘rsatamiz.

Uzunligi 2 ga teng bo‘lgan *OB* kesmani olamiz: 

$1^2 < 2 < 2^2$ dan $1 < \sqrt{2} < 2$ kelib chiqadi. Demak, $\sqrt{2}$ *AB* kesmada yotadi. *AB* kesmani 10 ta teng qismlarga bo‘lamiz. U holda quyidagiga ega bo‘lamiz:



$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$ yoki $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ ligini tekshrish qiyin emas. Demak, $\sqrt{2}$ sonini tasvirlovchi nuqta A_1B_1 kesmada yotadi. Xuddi shu tarzda A_1B_1 kesmani teng qismlarga bo‘linishini takrorlaymiz va quyidagiga ega bo‘lamiz:



Mos kesmalarning bo‘linishini davom ettirsak, quyidagi tengsizliklarga ega bo‘lamiz:

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42;$

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415;$

$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143;$

. . . .

Bu jarayonni cheksiz koʻp marta davom ettirish mumkin, chunki aks holda $\sqrt{2}$ soni ratsional sonlardan biriga toʻgʻri kelgan boʻlar edi. $\sqrt{2}$ sonining taxminiy qiymati sifatida kami bilan *1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142* va h.o. sonlarini va ortigʻi bilan *2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143* va h.o. sonlarini olish mumkin. Shunday qilib,

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

Agar Ikki musbat irratsional sonlarning mos keladigan oʻnli xonadagi raqamlari bir xil boʻlsa, ular teng deyiladi. Shubhasiz, agar ikkita irratsional son teng boʻlmasa, ularning mos oʻrindagi kamida bitta oʻnlik xonadagi raqamlari teng emas. Masalan, *1,41…* soni *1,42…* soniga teng emas.

Oʻzaro teng boʻlmagan α va β irratsional sonlarni koʻrib chiqaylik. Agar bu sonlarning butun qismlari teng boʻlmasa, u holda butun qismi katta boʻlgan son katta boʻladi. Masalan, $2{,}41\ldots > 1{,}41\ldots$. Agar butun qismlari teng boʻlsa, verguldan keyingi birinchi oʻnli raqamlar taqqoslanadi. Kattaroq son verguldan keyingi birinchi oʻnli raqami katta boʻlgan sondir. Agar bu raqamlar ham teng boʻlsa, keyingi oʻnli raqamlar taqqoslanadi va hokazo. Masalan,

$$3{,}7123\ldots > 3{,}7034\ldots;\ 100{,}3371\ldots > 100{,}3368\ldots.$$

Eslatib oʻtamiz, sonlar oʻqi deb, koordinata boshi *O*, oʻlchov masshtabi hamda yoʻnalishi tanlangan ixtiyoriy chiziqqa aytiladi. Ratsional sonlar holatiga oʻxshab, har bir haqiqiy songa sonlar oʻqidagi biror nuqtani mos qoʻyish mumkin.

Agar α biror musbat haqiqiy son boʻlsa, u holda unga *O* nuqtadan oʻngda α birlik masofada joylashgan *A* nuqtani, $-\alpha$ soniga esa *O* koordinata boshidan *A* nuqtaga nisbatan simmetrik boʻlgan A' nuqtani belgilaymiz.. Masalan, agar $\alpha = 1{,}4125\ldots$ - irratsional son boʻlsa, u holda

$1 < \alpha < 2$;

$1{,}4 < \alpha < 1{,}5$;

$1{,}41 < \alpha < 1{,}42$ va h.o.

Koʻrinib turibdiki, bu holda *A* nuqta *1; 1,4 ; 1,41; …* sonlariga mos keladigan nuqtalardan oʻng tomonida va *2; 1,5; 1,42 ; …* sonlariga mos keladigan nuqtalardan chap tomonida yotadi.

Koʻrinib turibdiki, bu shartlar $\alpha = 1{,}4125\ldots$ haqiqiy (irratsional) son geometrik tasviri sifatida qaraladigan sonlar oʻqidagi yagona A nuqtani belgilaydi. Shuning uchun har bir haqiqiy son sonlar oʻqidagi bitta nuqtaga, ya’ni uning geometrik tasviriga mos keladi (turli sonlarga sonlar oʻqidagi turli nuqtalar mos keladi).

Teskari tasdiq ham oʻrinli: sonlar oʻqining har bir nuqtasiga qandaydir haqiqiy son mos keladi. Agar bu nuqtani ifodalovchi kesma birlik kesma bilan mutanosib bo‘lsa, u holda bu nuqtaga ratsional son mos keladi. Aks holda, nuqtaga irratsional son mos keladi.

Shuningdek, quyidagini ham ta’kidlab o‘tamiz. Ma’lumki, L aylana uzunligining uning d diametriga nisbati diametr uzunligiga bog‘liq emas. Bu nisbat o‘zgarmas sondir. Uni π ($\pi = 3{,}1415926\ldots$) bilan belgilaymiz. Bu son cheksiz davriy bo‘lmagan o‘nli kasr, ya’ni irratsional son ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar. α , β - haqiqiy sonlar bo‘lsin. Agar ikkalasi ham ratsional bo‘lsa, ularni qo‘shish ratsional sonlarni qo‘shish qoidasiga muvofiq amalga oshiriladi. Agar bu sonlardan biri (yoki ikkalasi ham) irratsional bo‘lsa, ularning yig‘indisi $\alpha + \beta$ bilan belgilanadigan haqiqiy son bo‘lib, bu yig‘indi usbu sonlarning kami bilan olingan mos kasr qismlarining barcha yig‘indilaridan katta va ortig‘i bilan olingan mos kasr qismlarining yig‘indisidan kichikdir..

Misol 14. $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$ yig‘indining verguldan keyingi uchinchi raqamigacha aniqlikdagi o‘nli taqribiy qiymatini toping.

Yechish. $\frac{1}{3}$ va $\sqrt{3}$ sonlarining o‘nli taqribiy qiymatlarini yozamiz:

$$0 < \frac{1}{3} < 1 \; ; \; 1 < \sqrt{3} < 2 \; ;$$

$$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4 \; ; \; 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 \; ;$$

$$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34 \; ; \; 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 \; ;$$

$$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334 \; ; \; 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 \; ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

U holda

$$(0 + 1) < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < (1 + 2) \; ;$$

$$(0{,}3 + 1{,}7) < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < (0{,}4 + 1{,}8) \; ;$$

$$(0{,}33 + 1{,}73) < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < (0{,}34 + 1{,}74) \; ;$$

$$(0{,}333 + 1{,}732) < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < (0{,}334 + 1{,}733) \; ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

yoki

$$1 < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < 3 \; ;$$

$$2 < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < 2{,}2 \; ;$$

$$2{,}06 < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < 2{,}08 \; ;$$

$$2,065 < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < 2,067 ;$$

. . . .

Haqiqiy sonlarni qo‘shish amali kommutativlik va assotsiativlik qonunlarini qanoatlantiradi:

1^0 . Agar α , β - haqiqiy sonlar bo‘lsa, u holda $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

2^0 . Agar α , β , γ - haqiqiy sonlar bo‘lsa, u holda $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

α , β haqiqiy sonlar ayirmasi deb shunday γ haqiqiy soniga aytiladiki, $\beta + \gamma = \alpha$ bo‘ladi. Boshqacha aytganda, α va β ikki sonning ayirmasi $\alpha + (-\beta)$ ko`rinishdagi yig`indiga teng bo`lib, u $\alpha - \beta$ bilan belgilanadi.

Misol 15. $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$ bo‘lsin. $\sqrt{3}$ va $-\frac{1}{3}$ sonlarining o‘nli taqribiy qiymatlaridan foydalanamiz. U holda

$$-1 < -\frac{1}{3} < 0 ; 1 < \sqrt{3} < 2 ;$$

$$- 0,4 < -\frac{1}{3} < - 0,3 ; 1,7 < \sqrt{3} < 1,8 ;$$

$$- 0,34 < -\frac{1}{3} < - 0,33 ; 1,73 < \sqrt{3} < 1,74 ;$$

$$- 0,334 < -\frac{1}{3} < - 0,333 ; 1,732 < \sqrt{3} < 1,733 ;$$

. . . .

Mos tengsizliklarni hadma-had qo‘shib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$0 < \sqrt{3} - \frac{1}{3} < 2 ;$$

$$1,3 < \sqrt{3} - \frac{1}{3} < 1,5 ;$$

$$1,39 < \sqrt{3} - \frac{1}{3} < 1,41 ;$$

$$1,398 < \sqrt{3} - \frac{1}{3} < 1,400 ;$$

. . . .

α , β - haqiqiy sonlar bo‘lsin. Agar ikkala son ham ratsional bo‘lsa, unda ularning ko‘paytmasi ratsional sonlarni ko‘paytirish qoidalari bilan aniqlanadi.

α va β musbat haqiqiy sonlar bo‘lsin va bu sonlardan kamida bittasi irratsional son bo‘lsin. U holda ularning ko‘paytmasi ushbu sonlarning kami bilan olingan mos o‘nli taqribiy qiymatlarining barcha ko‘paytmalaridan katta va ortig‘i bilan olingan mos o‘nli taqribiy qiymatlarining barcha ko‘paytmalaridan kichik bo‘lgan haqiqiy son sifatida qabul qilinadi.

Misol 16. $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$ berilgan bo‘lsin. $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}$ haqiqiy son quyidagi tengsizliklarni qanoatlantirishini tekshirish qiyin emas:

$$0 \cdot 1 < \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} < 1 \cdot 2 ;$$

$$0{,}3 \cdot 1{,}7 < \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} < 0{,}4 \cdot 1{,}8 \,;$$

$$0{,}33 \cdot 1{,}73 < \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} < 0{,}34 \cdot 1{,}74 \,;$$

$$0{,}333 \cdot 1{,}732 < \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} < 0{,}334 \cdot 1{,}733 \,;$$

. . . .

yoki

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 2 \,;$$

$$0{,}51 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 0{,}72 \,;$$

$$0{,}5709 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 0{,}5916 \,;$$

$$0{,}576756 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 0{,}578822 \,;$$

. . . .

Agar α yoki β haqiqiy sonlardan kamida bittasi nolga teng bo‘lsa, u holda $\alpha \cdot \beta = 0$ bo‘ladi. Agar bu sonlardan biri, masalan, $\alpha < 0$ bo‘lsa, u holda $-\alpha > 0$ bo‘ladi va $\alpha \cdot \beta$ - ko‘paytma yuqoridagi kabi aniqlanadi. U holda

$$\alpha \cdot \beta = -(-\alpha \cdot \beta) \,.$$

Agar α va β haqiqiy sonlarning ikkalasi ham manfiy bo‘lsa, u holda $\alpha \cdot \beta$ ko‘paytma $-\alpha$ va $-\beta$ musbat sonlarning ko‘paytmasi kabi aniqlanadi, ya’ni

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta) \,.$$

Haqiqiy sonlar ko‘paytmasi amali kommutativlik va assotsiativlik qonunlarini ham qanoatlantiradi:

1^0 . Agar α , β - haqiqiy sonlar bo‘lsa, u holda $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

2^0 . Agar α , β , γ - haqiqiy sonlar bo‘lsa, u holda $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Bundan tashqari, haqiqiy sonlar ko‘paytmasining qo‘shish amaliga nisbatan ditributivlik qonunini ham qanoatlantiradi:

3^0. Agar α , β , γ - haqiqiy sonlar bo‘lsa, u holda $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

α va β sonlari o‘zaro teskari sonlar deyiladi, agar $\alpha \cdot \beta = 1$ bo‘lsa,. β soniga teskari sonni $\frac{1}{\beta}$ bilan belgilaymiz. α haqiqiy sonni β, $\beta \neq 0$ haqiqiy songa bo‘lishdan hosil bo‘lgan $\alpha : \beta$ bo‘linmani, $\beta \cdot \gamma = \alpha$ tenglikni qanoatlantiradigan, γ haqiqiy son deb ataymiz. Boshqacha qilib aytganda, α ni β ga bo‘lishdan hosil bo‘lgan bo‘linma - bu α va $\frac{1}{\beta}$ sonlarining ko‘paytmasidir.

Misol 18. $\alpha = \sqrt{2}$ va $\beta = \sqrt{5}$ berilgan bo‘lsin. U holda

$$1{,}4 < \alpha < 1{,}5\ ;\ 2{,}2 < \beta < 2{,}3\ ;$$

$$1{,}41 < \alpha < 1{,}42\ ;\ 2{,}23 < \beta < 2{,}24\ ;$$

$$1{,}414 < \alpha < 1{,}415;\ 2{,}236 < \beta < 2{,}237\ ;$$

. . . .

Bundan

$$\frac{1}{2{,}3} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2{,}2}\ ;\ 1{,}4\frac{1}{2{,}3} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 1{,}5\ \frac{1}{2{,}2}\ ;$$

$$\frac{1}{2{,}24} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2{,}23}\ ;\ 1{,}41\frac{1}{2{,}24} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 1{,}42\ \frac{1}{2{,}23}\ ;$$

$$\frac{1}{2{,}237} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2{,}236}\ ;\ 1{,}414\frac{1}{2{,}237} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 1{,}415\ \frac{1}{2{,}236}\ ;$$

…………………… ……………………..hosil qilamiz.

Shunday qilib, $0{,}6320 < \alpha : \beta < 0{,}6328$.

<u>Son tushunchasining rivojlanishi.</u> Son tushunchasi turli predmetlar bilan ishlashda insonning tabiiy ehtiyojlaridan kelib chiqqan. Predmetlar sonini aniqlash uchun ularni hisoblash kerak bo‘lgan. Predmetlarni sanashda natural sonlar deb ataluvchi *1, 2, 3, 4, . . .* sonlar paydo bo‘ldi. Predmetlarni sanashdan tashqari, ularni o‘lchash ham talab qilinar edi. O‘lchov natijalari ko‘pincha kasrlar sifatida ifodalanadi. $\frac{m}{n}$ $(m\ ,\ n \in N)$ ko‘rinishdagi musbat kasrlar shunday paydo bo‘ldi. Masalan, agar *AB* kesmani har biri *CD* birlik kesmaning n - chi qismiga teng bo‘lgan m ta kesmalarga bo‘lish mumkin bo‘lsa, u holda *AB* kesmaning uzunligi $\frac{m}{n}$ kasr sifatida ifodalanadi. Keyinchalik nazariy xarakterdagi turli ehtiyojlar paydo bo‘la boshladi. Masalan, ayirish amalini bajara olish uchun nol va manfiy sonlar zarur bo‘lib qoldi (dastlab manfiy sonlar miloddan avvalgi II-asrda Xitoy matematiklarining asarlarida uchraydi).

Matematikaga manfiy sonlar va nol kiritilgach, barcha ratsional sonlar bilan ishlash mumkin bo‘ldi. Har qanday kesmaning uzunligi musbat ratsional son yordamida har qanday aniqlik darajasi bilan ifodalanishi mumkin. Ammo nazariy tadqiqotlarda shunday kesmalar paydo bo‘ldiki, ularning uzunligi ratsional sonlar bilan ifodalanmaydi. Masalan, tomoni *1* ga teng kvadrat diagonalining uzunligi ratsional son bilan ifodalanmaydi. Shu sababli, ratsional sonlar to‘plamini unga $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ va h.o. irratsional deb ataladigan yangi sonlarni qo‘shish orqali kengaytirish zarurati paydo bo‘ldi. Barcha ratsional va irratsional sonlar birgalikda haqiqiy sonlar to‘plamini tashkil qiladi.

Agar N - barcha natural sonlar to‘plami, Z - barcha butun sonlar to‘plami, Q - barcha ratsional sonlar to‘plami, J - barcha irratsional sonlar to‘plami, R - barcha haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsa, u holda quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \text{ va } J \subset R,$$

Ularni quyidagi diagramma orqali ko‘rsatish mumkin: